Die

Elemente der Mathematik.

Von

Dr. Richard Baltzer

Professor am städtischen Gymnasium zu Dresden, Mitglied der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Erster Band.

Gemeine Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Algebra.

Dritte verbesserte Auflage.

Leipzig

Verlag von S. Hirzel.

1868.

Vorrede.

Das erste Buch dieser Elemente enthält einen kurzen Abriß des Rechenunterrichts zur Vorbereitung auf die allgemeine Arithmetik. Die Regel de tri, welche heute nicht mehr auf die Lehre von den Proportionen, sondern auf die Berechnung von Einheiten und Mehrheiten gegründet wird, konnte deshalb zum Vortheil der Lernenden weit in den Vordergrund gerückt werden. Einige Aenderungen im Vortrag der Lehre von den gemeinen Brüchen und den Decimalbrüchen empfehlen sich durch die Erleichterung, welche sie dem Unterricht gewähren. Der Abschnitt über die Genauigkeit von Zahlangaben und Rechnungsresultaten bildet eine Ergänzung, deren die Rechenbücher nicht mehr entbehren dürfen. Die aufgenommenen Beispiele mit vollständiger Ausführung sollen als Paradigmen dienen; die überall gezeigten Proben der Rechnung machen einen größern Vorrath von Rechnungsaufgaben überflüssig.

Das zweite Buch besteht aus 4 Abschnitten, von denen der erste die 4 Species der Buchstabenrechnung zum Gegenstande hat; der zweite enthält die Quadratwurzeln mit den irrationalen und complexen Zahlen, die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen nebst den geometrischen Progressionen; der dritte das gemeine Binomialtheorem, die Combinatorik und deren wichtigste Anwendungen; der vierte die Kettenbrüche, die Exponentialreihe, die Binomialreihe und die Logarithmenreihe.

Das dritte Buch beginnt mit einer Einleitung, welche die Proportionen, Grundbegriffe von den Functionen und die analytische Methode umfaßt. Der nächste Abschnitt behandelt die Lehre von den Gleichungen, die Bestimmung mehrerer Unbekannten durch ein System von Gleichungen, und insbesondere die quadratischen Gleichungen und Functionen. Darauf folgt die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen, der numerischen transscendenten und höhern algebraischen Gleichungen, der einfacheren Diophantischen Aufgaben. Den Schluß machen die elementarsten Sätze der algebraischen Analysis d. i. der Lehre von den algebraischen Functionen.

Die einzelnen Materien sind zumeist nach wissenschaftlichen Absichten gruppirt, dabei jedoch so unabhängig von einander bearbeitet, daß die Lehrer, welche das vorliegende Buch beim Unterrichte gebrauchen

wollen, wünschenswerthe Freiheit in der Auswahl und Anordnung der Lehrstoffe behalten. Bei dem ersten Unterricht ist von den weitern Ausführungen der einzelnen Paragraphen gar Manches zu streichen und erst gelegentlich nachzuholen. Die Algebra soll nicht etwa erst nach vollbrachtem Studium der hier gegebenen allgemeinen Arithmetik begonnen werden, es sind vielmehr ihre einzelnen Abschnitte zwischen die Abschnitte der allgemeinen Arithmetik einzuschalten. Man wird namentlich nach den vier Species der Buchstabenrechnung die Einleitung in die Algebra und die Gleichungen ersten Grades durchnehmen, dann die Quadratwurzeln mit den quadratischen Gleichungen und den Systemen von Gleichungen, dann die Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und geometrischen Progressionen mit den transscendenten Gleichungen, dann die Combinatorik u. s. w. Die Anordnung des Lehrbuchs soll den wissenschaftlichen Zusammenhang der im Lehrvortrag gesonderten Gegenstände auch äußerlich zur Anschauung bringen. Der analytische Gang des mündlichen Vortrags wird durch die synthetische Fassung des Lehrbuchs am wenigsten eingeschränkt.

Die dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten zunächst durch eine Anzahl kleinerer Verbesserungen des Ausdrucks und der Anordnung (II. §. 23, 6. §. 31, 6. III. §. 2, 11. §. 4. §. 5. §. 9, 7). In III. §. 6 ist die Ausführung über die logarithmische Berechnung der realen Wurzeln einer quadratischen Gleichung weggelassen und dafür die Reduction der quadratischen Formen aufgenommen worden; auch ist daselbst die Behandlung eines Systems von zwei nichtlinearen Gleichungen genauer angegeben worden. Ferner hat der Vortrag der Newton'schen Methode zur Berechnung realer Wurzeln von algebraischen Gleichungen größere Schärfe erhalten. Endlich ist zu dem Sturm'schen Satz auch Cauchy's berühmter Satz und eine Hinweisung auf die vorzügliche Gräffe'sche Methode hinzugefügt worden.

Inhalt.

Erstes Buch.

Gemeine Arithmetik.

Zweites Buch.

Allgemeine Arithmetik.

Drittes Buch.

Algebra.

Erstes Buch.

Gemeine Arithmetik.

§. 1. Addition und Subtraction.

1. Zu einer Zahl eine andere addiren heißt die Einheiten der zweiten Zahl zu der erstern hinzuzählen. Man bezeichnet 7 + 5 = 12 und liest „7 plus 5 gleich 12." Die Zahl 12 heißt die Summe der Zahlen 7 und 5, welche die Glieder (Posten) der Summe genannt werden.

Die Ordnung der Glieder ist beliebig, z. B. 5 + 7 = 7 + 5, 9 + 4 + 6 = 4 + 6 + 9, u. s. w.

2. Von einer Zahl eine andere subtrahiren heißt die Einheiten der zweiten Zahl von der erstern abzählen. Man bezeichnet 12 — 7 = 5 und liest „12 minus 7 gleich 5, oder 7 von 12 bleibt 5." Die Zahl 5 heißt die Differenz (Unterschied) der Zahlen 12 und 7, von denen jene der Minuendus, diese der Subtrahendus genannt wird.

Die Differenz zweier Zahlen ist die Zahl, welche mit der zweiten eine Summe giebt, die der ersten gleichkommt; z. B. 12 — 7 = 5, weil 5 + 7 oder 7 + 5 = 12. Also:

Differenz + Subtrahendus = Minuendus.

Die Differenz giebt an, um wieviel der Minuendus mehr ist als der Subtrahendus, und um wieviel der Subtrahendus weniger ist als der Minuendus; z. B. 12 ist mehr als 7, und 7 ist weniger als 12, und zwar um 12 — 7 d. i. 5.

3. Man kann nur Gleichartiges addiren und subtrahiren, z. B. Einer und Einer, Zehner und Zehner, Pfennige und Pfennige, Thaler und Thaler, Pfund und Pfund, u. s. w. Summe und Differenz sind mit den Gliedern gleichbenannt.

Praktische Bemerkungen. Man spricht und schreibt größere Zahlen in Abtheilungen von drei Stellen (Einer, Tausende, Millionen, . .) z. B.

983 017 besser als 983017

98 704 327 besser als 98704327

und setzt bei der Addition und Subtraction derselben genau Einer unter Einer u. s. w.

Bei der Addition vieler Glieder begleitet man die Bewegung des

Auges mit der Feder, spricht nur die Summen aus und zwar im tactmäßigen Fortschritt, also bei den Einern des folgenden Beispiels nicht 6 + 7 = 13, 13 + 3 = 16, 16 + 8 = 24, 24 + 4 = 28, sondern sofort 6, 13, 16, 24, 28, während man mit Auge und Feder die Reihe durchläuft. Die gefundenen 2 Zehner bilden den Anfang der nächsten Summe und werden zu größerer Sicherheit über die Reihe der Zehner bemerkt.

Zur Einübung addirt man die Glieder einzeln oder gruppenweise und subtrahirt von der Summe wieder die einzelnen Glieder.

2 33 22	76 856	749 574	1445 088
76 856	+ 9 237	+ 76 856	— 76 856
+ 9 237	86 093	+ 9 237	1368 232
+568 683	+568 683	835 667	— 9 237
+ 40 738	654 776	568 683	1358 995
+749 574	+ 40 738	+ 40 738	—568 683
1445 088	695 514	609 421	790 312
	+749 574	+835 667	—40 738
	1445 088	1445 088	749 574
			—749 574
			0

Man ist Störungen beim Rechnen weniger ausgesetzt, wenn man die gedachten Zahlen (auch leise) zu sprechen sich entwöhnt.

Beim Kopfrechnen ist es vortheilhaft, mit den höchsten Stellen anzufangen; z. B. 37 + 24 = 57 + 4 = 61, 74 — 38 = 44 — 8 = 36. Statt 96 zu addiren, addirt man 100 und subtrahirt von der Summe 4. Statt 95 zu subtrahiren, subtrahirt man 100 und addirt zur Differenz 5, u. s. w.

§. 2. Multiplication.

1. Eine Zahl mit einer andern multipliciren heißt die erstere sovielmal als Glied einer Summe setzen, als die zweite angiebt. Man bezeichnet die Summe 7 + 7 + 7 mit 7 . 3 oder 7 × 3 und liest „7 multiplicirt mit 3," oder auch „7 mal 3" (eigentlich 3mal 7). Die Zahl 21 heißt das Product der Zahlen 7 und 3, von denen jene der Multiplicandus, diese der Multiplicator genannt wird.

2. Multiplicandus und Multiplicator können ohne Veränderung des Products vertauscht werden und heißen Factoren des Products. Es ist

$$\begin{aligned} 7 \,.\, 3 = \;& 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 \,.\, 7 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

weil 3 Reihen von je 7 Einheiten, von der Seite betrachtet, 7 Reihen von je 3 Einheiten bilden. Eben so findet man $6 \times 7 \times 3 = 6 \times 3 \times 7$, indem man 6 statt 1 setzt.

Die Ordnung der Factoren ist beliebig. Daher $5 \times 25 \times 125 \times 2 \times 4 \times 8 = 5 \times 2 \times 25 \times 4 \times 125 \times 8 = 10 \times 100 \times 1000 = 1000\,000$, $25 \times 36 = 25 \times 4 \times 9 = 100 \times 9 = 900$ u. s. f. Statt mit 42 zu multipliciren, kann man mit 7 multipliciren und das Product mit 6, u. s. f.

3. Der Multiplicator kann nur eine unbenannte Zahl sein, weil er die gleichen Glieder zählt, deren Summe das Product ist; z. B. 7 Thlr. × 5 = 7 × 5 d. i. 35 Thlr. Das Product ist mit dem Multiplicandus gleichbenannt.

Praktische Bemerkungen. Bei mehrstelligen Zahlen beginnt man entweder mit der letzten Stelle des Multiplicators, oder besser*) mit seiner höchsten zu multipliciren, nachdem man dieselbe fest in den Sinn genommen.

```
  7536 . 26847        7536 . 26847
  52752               15072
 30144                 45216
60288                   60288
45216                    30144
15072                     52752
202318992           202318992
```

Man nimmt nach einander 6 × 7 Einer, 3 × 7 Zehner, 5 × 7 Hunderte, 7 × 7 Tausende u. s. f., oder 6 × 2 Zehntausende, 3 × 2 Hunderttausende, 5 × 2 Millionen u. s. f., ohne Umstellungen in Gedanken zuzulassen.

Zur Einübung ist die Probe wesentlich:

```
 26847 × 7536
187929
 134235
   80541
   161082
202318992
```

Das Product einer 5stelligen Zahl mit einer 4stelligen Zahl hat 5 + 4 d. i. 9 oder 8 Stellen, weil $10\,000 \times 1000 = 10\,000\,000$, und $99\,999 \times 9999$ weniger als $100\,000 \times 10\,000$ d. i. $1000\,000\,000$ u. s. f.

Bei drei Factoren kann man zur Uebung den ersten mit dem zweiten multipliciren, das Product mit dem dritten; dann den ersten mit

*) Um der in §. 18 gezeigten Abkürzungen willen.

dem dritten, und das Product mit dem zweiten; dann den zweiten mit dem dritten, und das Product mit dem ersten. Jedesmal muß dieselbe Zahl gefunden werden.

Statt die Summe oder Differenz zweier Zahlen zu multipliciren, kann man die Glieder einzeln multipliciren und die Producte addiren oder subtrahiren, u. s. f.

Beim Kopfrechnen fängt man mit der höchsten Stelle des Multiplicandus an; z. B. 365 × 7 = 2100, + 420 d. i. 2520, + 35 d. i. 2555. Man findet

48 × 17 = 50 × 17 d. i. 850 — 2 × 17 = 816
48 × 5 = 24 × 10 = 240
48 × 25 = 12 × 100 = 1200
48 × 15 = 240 × 3 = 720
48 × 75 = 1200 × 3 = 3600, u. s. w.

§. 3. Division.

1. Eine Zahl durch eine andere dividiren heißt die Zahl angeben, welche mit der zweiten ein Product giebt, das der ersten gleichkommt. Man bezeichnet 35 : 7 und liest „35 durch 7 dividirt, oder 7 in 35." Dieß giebt 5, weil 5 × 7 oder 7 × 5 = 35. Die Zahl 5 heißt der Quotient der Zahlen 35 und 7, von denen jene der Dividendus, diese der Divisor genannt wird.

Der Quotient ist also die Zahl, welche mit dem Divisor multiplicirt, oder mit welcher der Divisor multiplicirt den Dividendus giebt. Also:

Quotient × Divisor = Dividendus.

2. Entweder ist der Divisor unbenannt, und der Quotient der sovielte Theil des Dividendus als der Divisor angiebt,

oder der Divisor ist mit dem Dividendus gleichbenannt, und der Quotient das Verhältniß des Dividendus zum Divisor, d. h. er giebt an, wievielmal der Divisor im Dividendus enthalten, wievielmal so groß der Dividendus ist als der Divisor.

Z. B. 35 : 7 = 5 d. h. 5 ist der 7te Theil von 35, 7 in 35 ist 5mal enthalten, 35 ist 5mal so groß als 7.

35 Thlr. : 7 Thlr. = 5 d. h. das Verhältniß von 35 Thalern zu 7 Thalern ist 5, 7 Thaler sind in 35 Thalern 5mal enthalten, 35 Thaler ist 5mal soviel als 7 Thaler.

Das Verhältniß von 36 Thalern zu 9 Thalern, von 36 Pfund zu 9 Pfund, von 36 Fuß zu 9 Fuß u. s. w. ist das Verhältniß von 36 zu 9 d. i. 4. Denn da 9 × 4 = 36, so sind 9 Thlr. × 4 = 36 Thlr., 9 Pfd. × 4 = 36 Pfd., 9′ × 4 = 36′ u. s. w.

3. Wenn der Dividendus nicht ein Vielfaches vom Divisor ist, so geht die Division nicht auf, und es bleibt ein Rest; der Quotient fällt zwischen zwei auf einander folgende natürliche Zahlen und kann nur mit Hülfe eines Bruches angegeben werden.

56 : 7 = 8, weil 56 = 7 × 8, ein Vielfaches von 7.

91 : 7 = 13, weil 91 = 7 × 13, " " "

23 : 7 ist mehr als 3 und weniger als 4, weil 7 × 3 = 21 und 7 × 4 = 28. Die Differenz 2 zwischen 23 und 21, welche ein Rest heißt, soll auch durch 7 dividirt werden. Nun ist 1 : 7 der 7te Theil von 1, welcher $\frac{1}{7}$ bezeichnet und 1 Siebentel gelesen wird. Ferner ist 2 : 7 der 7te Theil von 2, mithin 2mal so groß als der 7te Theil von 1, also = $\frac{2}{7}$ (2 Siebentel). Daher ist 23 : 7 = $3\frac{2}{7}$, d. h. der 7te Theil von 23 ist $3\frac{2}{7}$, das Verhältniß von 23 zu 7 ist $3\frac{2}{7}$. Die künstlichen Ausdrücke

23 ist $3\frac{2}{7}$mal so groß als 7, 7 ist $3\frac{2}{7}$mal in 23 enthalten,
23 ist das $3\frac{2}{7}$fache von 7, 7 ist der $3\frac{2}{7}$te Theil von 23,

werden beim Rechnen mit Vortheil angewendet.

Die Zahlen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, . . heißen Brüche, die obere Zahl der Zähler (er zählt die Theile), die untere der Nenner des Bruches (er benennt die Theile). Mit Vorbehalt der Rechnung kann man 5317 : 683 = $\frac{5317}{683}$ setzen, und die Bezeichnungen 5317 : 683 und $\frac{5317}{683}$ als gleichbedeutend gebrauchen.

4. Ist ein Bruch neben der ganzen Zahl des Quotienten unbeträchtlich oder unzulässig (bei Individuen), so achtet man ihn für 1 oder für 0, je nachdem der Zähler die Hälfte des Nenners und der Bruch den Werth von $\frac{1}{2}$ übersteigt, oder nicht. 39 : 11 ist genauer 4 als 3, weil 39 näher an 44 als an 33 liegt, und der Rest 6 mehr als die Hälfte von 11 beträgt. Dagegen ist 43 : 8 genauer 5 als 6.

Z. B. um den Durchschnitt (das arithmetische Mittel, einen Näherungswerth) gegebener Werthe zu berechnen, dividirt man ihre Summe durch ihre Anzahl; der Quotient wird als Näherungswerth ohne Bruch angegeben, z. B.

$$\begin{array}{r} 4726 \\ 4754 \\ 4698 \\ 4719 \\ \hline 18897 : 4 \\ \hline 4724 \end{array}$$

Also ist 4724 der Durchschnittswerth der gegebenen Zahlen.

Praktische Bemerkungen. Zur Einübung ist die Probe we-

sentlich, daß man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, um den Dividendus wieder zu erhalten; z. B.

$253\,827 : 385 = 659\frac{112}{385}$	$659\frac{112}{385} \cdot 385$
231 0	197 7
22 82	52 72
19 25	3 295
3 577	112
3 465	253 827
112	

Um die Hunderte des Quotienten zu finden, überlegt man, daß 385 in 2538 Hundert nahe sovielmal enthalten ist, als 3 Hundert in 25 Hundert, oder näher sovielmal, als 4 Hundert in 25 Hundert (weil 385 näher 400 als 300), oder als 4 in 25 u. s. f. Die Quotienten sind bei vermehrtem Divisor etwas zu vergrößern, z. B. 4 in 35 wurde 9mal genommen. Vergl. 4.

Bei der Probe giebt der 385te Theil von 112 385mal genommen das Ganze 112.

Endigt der Divisor mit Nullen, so kann man dieselben während der Rechnung mit eben soviel Stellen am Ende des Dividendus unbeachtet lassen; z. B.

$327\,456 : 6400 = 3274{,}56 : 64{,}00 = 51\frac{1056}{6400}$

320
74
64
10

327 400 : 6400 = 3274 : 64, denn 64 Hundert sind in 3274 Hundert sovielmal enthalten, als 64 in 3274.

Statt durch 15 zu dividiren, kann man den 5ten Theil durch 3 dividiren. Statt durch 25 zu dividiren, kann man das 4fache durch 100 dividiren, u. s. w.

Um durch 4 zu dividiren, beachtet man, zwischen welchen der Zahlen 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, .. der Dividendus liegt, u. s. w.

§. 4. Rechnung mit mehrfach benannten Zahlen.

1. Zur Vermeidung der Brüche hat man die verschiedenen Maßeinheiten eingetheilt und bestimmten Theilen derselben besondere Namen gegeben. Die größeren Maßeinheiten dienen zur leichteren Auffassung großer Mengen kleinerer Einheiten.

Geldeinheiten:

Thaler (30) Silbergroschen (12) / Neugroschen (10) Pfennig. Gulden (60) Kreuzer / (100) Neukreuzer.
Franc (100) Centime.
Livre Sterling (20) Shilling (12) Penny.

Zahleinheiten:

Groſſ (12) Dutzend (12) Stück.
Schock (4) Mandel (15) Stück.
Ballen (10) Ries (20) Buch $\left\{\begin{matrix}\text{24 Schreib-}\\ \text{25 Druck-}\end{matrix}\right\}$ Bogen.

Zeiteinheiten:

Tag (24^h) Stunde ($60'$) Minute ($60''$) Sekunde.
Jahr (12) Monat (30) Tag, bei geſchäftlichen Rechnungen.

Längeneinheiten:

Ruthe $\left\{\begin{matrix}12'\\10'\end{matrix}\right\}$ Fuß $\left\{\begin{matrix}12''\\10''\end{matrix}\right\}$ Zoll $\left\{\begin{matrix}12'''\\10'''\end{matrix}\right\}$ Linie.

Die obere Eintheilung iſt nach dem Duodecimalſyſtem, die untere nach dem Decimalſyſtem gemacht.

Kilometer (10) Hectometer (10) Decameter (10) Meter (10) Decimeter (10) Centimeter (10) Millimeter.
Meile (2000^0) Ruthe. Elle (24) Zoll.

Winkeleinheiten:

Geſtreckter Winkel (2^r) Rechter Winkel (90^0) Grad ($60'$) Minute ($60''$) Sekunde.

Flächeneinheiten:

Gewöhnlich Quadrateinheiten, d. h. Quadrate, deren Seiten Längeneinheiten ſind, z. B. Quadratfuß, ein Quadrat, deſſen Seite ein Fuß iſt.

Wenn 1 Fuß $\left\{\begin{matrix}12\\10\end{matrix}\right\}$ Zoll hat, ſo hat 1 Quadratfuß (□′)

$\left\{\begin{matrix}12\times 12\\10\times 10\end{matrix}\right.$ d. i. $\left.\begin{matrix}144\\100\end{matrix}\right\}$ Quadratzoll (□″) u. ſ. w.

Feldmaße: Morgen (180 □Ruthen), Are (100 □Meter), Acker, Scheffel Ausſaat u. dergl.

Raumeinheiten:

Gewöhnlich Cubikeinheiten, d. h. Würfel, deren Kanten Längeneinheiten und deren Seiten folglich Quadrateinheiten ſind, z. B. Cubikfuß, ein Würfel (Cubus), deſſen Kante ein Fuß iſt.

Wenn 1 Fuß $\begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \end{Bmatrix}$ Zoll hat, so hat 1 Cubikfuß $\begin{Bmatrix} 12 \times 12 \times 12 \\ 10 \times 10 \times 10 \end{Bmatrix}$ d. i. $\begin{Bmatrix} 1728 \\ 1000 \end{Bmatrix}$ Cubikzoll u. s. w.

Für Getreide:
Wispel (2) Malter (12) Scheffel (4) Viertel (4) Metzen.

Für Flüssigkeiten:
Fuder (4) Oxhoft (1½) Ohm (2) Eimer (2) Anker (30) Quart.
Faß. Tonne. Kanne. Litre (1 Cubikdecimeter).

Für feste Körper z. B. Holz: Klafter. Stère (1 Cubikmeter).

Gewichteinheiten:
Centner (110) Pfund (32) Loth (4) Quentchen. Centner (5) Stein.
Centner (100) Pfund (30) Loth (10) Quent (10) Cent.
Kilogramm (10) Hectogramm (10) Decagramm (10) Gramm (10) Decigramm (10) Centigramm (10) Milligramm. Pfund (½ Kilogramm).
Last. Mark (16 Loth). Karat (⅜ Loth).
Unze (8) Drachme = Quentchen (60) Gran.

2. Eine Preisangabe in Thalern, Groschen und Pfennigen, eine Längenangabe in Fuß, Zoll und Linien, eine Gewichtsangabe in Centnern, Pfund und Loth u. s. w. heißt eine mehrfach benannte Zahl. Man kann die höheren Einheiten durch Multiplication in niedere verwandeln (resolviren), und die niederen Einheiten durch Division in höhere (reduciren); z. B. Thaler werden in Silbergroschen verwandelt, indem man sie mit 30 multiplicirt, 25 Thlr. = 25 × 30 d. i. 750 Sgr. Pfennige werden in Silbergroschen verwandelt, indem man sie durch 12 dividirt, 319 Pf. = 319 : 12 d. i. $26\frac{7}{12}$ Sgr. = 26 Sgr. 7 Pf.

```
Schema: 547 Thlr. 19 Sgr. 5 Pf.
        ------
         16 410
             19
        ------
         16 429 Sgr.
        ------
        197 148
              5
        ------
        197 153 Pf.
197 153 Pf. : 12 = 16 429 Sgr. : 30 = 547 Thlr.
 77                 1 4
  5 1                 22
    35                19 Sgr.
    113
       5 Pf.
```

3. Man rechnet mit mehrfach benannten Zahlen nach denselben Regeln, wie mit mehrstelligen Zahlen, welche aus Einern, Zehnern, Hunderten u. s. f. bestehen. Addition, Subtraction, Multiplication mehrfach benannter Zahlen beginnt man bei den niederen Einheiten, Division bei den höheren. Auch kann man anfangs resolviren, mit den niederen Einheiten die verlangte Rechnung vornehmen und die gefundene Zahl reduciren.

1 22		22				
27	Thlr.	16	Sgr.	4	Pf.	
+ 109	„	25	„	6	„	
+ 653	„	14	„	10	„	
+ 25	„	7	„	9	„	
816	Thlr.	64		29		
		4	Sgr.	5	Pf.	

816	Thlr.	4	Sgr.	5	Pf.	
— 27	„	16	„	4	„	*)
788	„	18	„	1	„	
—109	„	25	„	6	„	
678	„	22	„	7	„	
—653	„	14	„	10	„	
25	„	7	„	9	„	

6 Ctr.	78 Pfd.	25 Loth × 84
60	65	2100
504	312	192
564 Ctr.	624	180
	6617	160
	17 Pfd.	20 Loth.

Man nimmt zuerst 25 Loth × 84 = 65 Pfd. 20 Loth, dazu 78 Pfund × 84, d. i. 60 Ctr. 17 Pfd., dazu 6 Ctr. × 84, d. i. 564 Ctr.

Oder:	
6 Ctr. 78 Pfd. 25 Loth.	
660	
78	
738 Pfd.	
22 14	
1 476	
25	
23 641 Loth × 84	
1891 28	
94 564	
1985 844 Loth : 32 =	62 057 Pfd. : 110 = 564 Ctr.
65	7 0
1 84	45
244	17 Pfd.
20 Loth.	

*) Statt 16 Sgr. von 1 Thlr. 4 Sgr. oder 34 Sgr. abzuziehen, kann man 16 von 30 subtrahiren und zur Differenz 4 addiren, u. s. w.

28 Wspl.	17 Schffl.	$15\frac{29}{96}$ Mtzn.
2759 Wspl.	19 Schffl.	13 Mtzn. : 96
192	1704	546
839	4723	91
768	96	1469
71	763	96
	672	509
	91	480
		29

Man findet zuerst 2759 Wspl. : 96 = 28 Wspl., verwandelt den Rest in Schffl., addirt 19, dividirt die Summe durch 96 und findet 17 Schffl.; den Rest verwandelt man in Metzen, addirt 13, dividirt die Summe durch 96 und findet $15\frac{29}{96}$ Mtzn.

Oder: 2759 Wspl. 19 Schffl. 13 Mtzn.
5518
11036
19
66235 Schffl.
397410
13
1059773 Mtzn. : 96 = 11039 Mtz. : 16 = 689 Schffl. : 24 = 28 Wspl.

96	96	48
99	143	209
96	128	192
377	159	17 Schffl.
288	144	
893	15 Mtzn.	
864		
$\frac{29}{96}$ Mtzn.		

Als Uebung kann man die Probe hinzunehmen, daß der Quotient mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus giebt.

28 Wspl.	17 Schffl.	$15\frac{29}{96}$ Mtzn. $\times$ 96
71	91	29
168	672	480
252	96	96
2759 Wspl.	1723	1469
	168	29
	43	13 Mtzn.
	24	
	19 Schffl.	

Um $\frac{5}{7}$ Thlr. aufzulösen, berechnet man den 7ten Theil von 5 Thlr. oder 150 Sgr. und erhält $21\frac{3}{7}$ Sgr. Eben so ist $\frac{3}{7}$ Sgr. der 7te Theil von 3 Sgr. oder 36 Pf. = $5\frac{1}{7}$ Pf. Also ist $\frac{5}{7}$ Thlr. = 21 Sgr. $5\frac{1}{7}$ Pf.

Um das Verhältniß 25 Ctr. 106 Pfd. : 3 Ctr. 79 Pfd. zu berechnen, verwandelt man beide Gewichte in Pfund. Nun sind 408 Pfd. in 2856 Pfd. sovielmal enthalten als 408 in 2856, nämlich 7mal. Also ist 7 das gesuchte Verhältniß, d. h. 3 Ctr. 78 Pfd. sind in 25 Ctr. 106 Pfd. 7mal enthalten.

Die einfache Zeitrechnung sucht entweder aus zwei Terminen die Zwischenzeit, oder aus einem Termin und der Zwischenzeit den andern Termin.

a. Wie lang ist die Zeit von 1818 den 29. Octbr. bis 1832 den 17. März? Vom 29. Octbr. 1818 bis 1819 sind 64 Tage, von 1819 bis 1832 sind 13 Jahre, und bis zum 17. März 76 Tage, also überhaupt 13 Jahre 140 Tage verflossen.

Wie lang ist die Zeit von 1815 den 12. Mai bis 1837 den 7. Sept.? Vom 12. Mai bis 7. Sept. 1815 sind 118 Tage und bis 7. Sept. 1837 noch 22 Jahre verflossen.

b. Welches Datum ist 13 Jahre 216 Tage nach dem 21. Juni 1820? 194 Tage nach dem 21 Juni ist der 1. Jan. 1821, die übrigen 22 Tage und 13 Jahre später ist der 23. Jan. 1834.

c. Welches Datum ist 56 Jahre 86 Tage vor dem 7. März 1844? 67 Tage vor dem 7. März 1844 ist der letzte Dec. 1743, die übrigen 19 Tage und 56 Jahre früher ist der 12. Dec. 1787.

Weniger genau löst man diese Aufgaben, wenn man das Jahr zu 12 Monaten und den Monat zu 30 Tagen annimmt.

§. 5. Proportionalität der Größen*).

1. Eine Größe heißt abhängig von einer andern Größe, wenn eine Aenderung der letztern eine Aenderung der erstern zur Folge hat. Z. B. die Länge eines Metallstabes ist abhängig von der Temperatur, weil eine Aenderung der Temperatur eine Verlängerung oder Verkürzung des Stabes nach sich zieht; der Preis einer Waare ist abhängig von ihrer Menge, Güte, Seltenheit, von der Nachfrage u. s. w.

2. Eine Größe heißt einer andern Größe proportional, wenn sie von ihr so abhängt, daß, während die zweite mehrmal so groß wird, die erste ebensovielmal so groß wird.

Der Preis einer Waare ist in vielen Fällen ihrem Gewicht proportional d. h.

5 Pfd. kosten 5mal soviel als 1 Pfd.
1 Pfd. kostet den 7ten Theil soviel als 7 Pfd.

---

*) Vergl. im 3. Buche §. 2.

Ausnahmen bilden die Preise von Edelsteinen, Glasscheiben, Nutzhölzern u. dgl.

Die Arbeit ist der Kraft proportional d. h.

8 Arbeiter leisten 8mal soviel als 1 Arbeiter,

1 Arbeiter leistet den 4ten Theil soviel als 4 Arbeiter.

Die Zinsen sind dem Capital proportional d. h.

19 Thlr. Cap. geben 19mal soviel Zinsen als 1 Thlr. Cap.

1 Thlr. Cap. giebt den 100ten Theil soviel Zinsen als 100 Thlr. Cap.

3. Eine Größe heißt einer andern Größe umgekehrt (indirect) proportional, wenn sie von ihr so abhängt, daß, während die zweite mehrmal so groß wird, die erste den ebensovielten Theil so groß wird.

Bei einer Arbeit ist die Zeit der Kraft umgekehrt proportional d. h.

4 Arbeiter brauchen den 4ten Theil soviel*) Zeit als 1 Arb.

1 Arbeiter braucht 5mal soviel Zeit als 5 Arb.

Bei gegebener Fläche ist die Breite eines Rechtecks der Länge umgekehrt proportional, d. h. man braucht

bei 60 Fuß Länge den 60ten Theil soviel Breite, als bei 1 Fuß Länge,

bei 1 Fuß Länge 50mal soviel Breite, als bei 50 Fuß Länge.

Mit einem Vorrath reichen

9 Mann den 9ten Theil so lange als 1 Mann,

1 Mann 7mal so lange als 7 Mann.

Für einen gewissen Preis schafft man

3 Ctr. den 3ten Theil so weit als 1 Ctr.,

1 Ctr. 5mal so weit als 5 Ctr.

Eine gespannte Saite oder die Luft in einer Orgelpfeife schwingt in bestimmter Zeit

bei 3 Fuß Länge den 3ten Theil so oft als bei 1 Fuß Länge,

bei 1 Fuß Länge 2mal so oft als bei 2 Fuß Länge.

4. Eine Größe heißt dem Quadrat oder Cubus einer andern Größe proportional, wenn, während die zweite 2, 3, 4, . . mal so groß wird, die erste 2.2, 3.3, 4.4, . . mal so groß, oder 2.2.2, 3.3.3, 4.4.4, . . mal so groß wird.

Eine Größe heißt dem Quadrat einer andern Größe umgekehrt proportional, wenn, während die zweite 2, 3, 4, . . mal so groß wird, die erste den 2.2ten, 3.3ten, 4.4ten, . . Theil so groß wird.

Der Preis eines Diamanten ist dem Quadrat seines Gewichts proportional, d. h. der Diamant kostet

---

*) Man sagt besser: „den 4ten Theil soviel", als „4mal weniger".

3 Karat schwer 3.3mal soviel als 1 Karat schwer,
1 Karat schwer den 2.2ten Theil soviel als 2 Karat schwer.

Bei einem freigelassenen Körper ist die Falltiefe dem Quadrat der Fallzeit proportional, d. h. der Körper fällt

in 4 Sekunden 16mal so tief als in 1 Sek.,
in 1 Sekunde den 9ten Theil so tief als in 3 Sek.

Die Quadratfläche ist dem Quadrat der Seite, die Kreisfläche und die Kugelfläche dem Quadrat des Radius proportional.

Der Würfelinhalt ist dem Cubus der Kante, der Kugelinhalt dem Cubus des Radius proportional, d. h. der Würfel ist

bei 3 Fuß Kante 27mal so groß, als bei 1 Fuß Kante,
bei 1 Fuß Kante den 64ten Theil so groß, als bei 4 Fuß Kante.

Die Beleuchtung einer kleinen Fläche ist dem Quadrat des Lichtabstandes umgekehrt proportional, d. h. sie ist

4 Fuß vom Licht den 4.4ten Theil so groß, als 1 Fuß vom Licht,
1 Fuß vom Licht 9mal so groß, als 3 Fuß vom Licht.

Die Anzahl der Schwingungen, welche ein Pendel in gegebener Zeit macht, ist dem Quadrat der Pendellänge umgekehrt proportional. Das Gewicht eines Körpers ist dem Quadrat des Abstandes vom Erdcentrum umgekehrt proportional.

§. 6. Regel de tri.

Wenn einer Größe (A) eine andere Größe (B) proportional ist, und ein Paar zusammengehörige Werthe der Größen gegeben sind, so läßt sich für jeden Werth der einen (A) der dazu gehörige Werth der andern (B) berechnen. Die Anleitung zu dieser Berechnung heißt Regel de tri.

1. Aufgabe: Wenn man für 9 Thlr. 7 Pfd. einer Waare erhält, wieviel kosten 13 Pfd.?

Man bildet nach der Frage die vorläufige Antwort so, daß die gesuchte Größe den Schluß macht:

13 Pfd. kosten irgend wieviel Thaler.

Diesem Satze wird aus der Aufgabe der Obersatz nachgebildet:

7 Pfd. kosten 9 Thaler.

Durch den Einheitsschluß „1 Pfd. kostet den 7ten Theil soviel als 7 Pfd." (§. 5) erhält man den Mittelsatz:

1 Pfd. kostet 9 Thaler : 7

oder wie man auch bezeichnen kann (§. 3, 3)

1 Pfd. kostet $\frac{9 \text{ Thlr.}}{7}$ („9 Thlr. durch 7, oder $\frac{9}{7}$ Thlr.").

Der Mehrheitsschluß „13 Pfd. kosten 13mal soviel als 1 Pfd." (§. 5) fordert, den 7ten Theil von 9 Thlr. 13mal zu nehmen, d. i. den 7ten Theil von 9 × 13 Thlr. So erhält man den Schlußsatz:

13 Pfd. kosten $\frac{9 \text{ Thlr.} \times 13}{7}$ („9 Thlr. mal 13, durch 7").

Die nun vorzunehmende Ausrechnung 9 × 13 = 117 und 117 : 7 = $16\frac{5}{7}$ ergiebt die gesuchte Antwort:

13 Pfd. kosten $16\frac{5}{7}$ Thlr.

2. Ist in der vorläufigen Antwort die gegebene Größe eine mehrfach benannte Zahl oder anders benannt als die gleichartige Größe der Aufgabe, so bringe man vor Bildung der Sätze beide auf gleiche Benennung.

Wenn man für 9 Thlr. 17 Sgr. 7 Pfd. 12 Loth erhält, wieviel kosten 13 Pfd. 4 Loth? Statt 13 Pfd. 4 Loth hat man 420 Loth, und statt 7 Pfd. 12 Loth hat man 236 Loth zu nehmen. Dann verfährt man wie oben. Bei der Ausrechnung kann man auch 9 Thr. 17 Sgr. in Sgr. verwandeln, was jedoch nicht nothwendig ist. (Vergl. §. 4.)

Wenn man für 9 Thlr. 17 Sgr. 7 Pfd. erhält, wieviel kosten 24 Loth? Statt 7 Pfd. führt man 224 Loth ein, u. s. w.

3. Aufgabe: Wie lange brauchen 28 Arbeiter zu einem Werke, welches 16 Arbeiter in 15 Wochen vollenden?

Auflösung: 16 Arbeiter brauchen 15 Wochen
1 „ „ 15 W. × 16 (16mal so viel)
28 „ $\frac{15 \text{ W.} \times 16}{28}$ (den 28. Theil so viel)

Ausrechnung.
```
 15×16
240 : 28 = 8 W. 3 1/2 8 Tage, die Arbeitswoche zu
224               6 Tagen gerechnet.
 16×6
 96
 84
 12
```

Antwort. 28 Arbeiter brauchen 8 Wochen $3\frac{12}{28}$ Tage.

4. In vielen Fällen giebt man an, wieviel Einheiten einer Größe zu 100 Einheiten einer andern Größe gehören, und nennt jene Anzahlen Procente (bezeichnet %).

Ein Capital trägt 4 Proc. Zinsen heißt: 100 Thlr. Capital tragen

jährlich 4 Thlr. Zinsen. Werden die Zinsen nicht ausgezahlt (aber auch nicht verzinst), so wächst das Capital, und zwar

aus 100 Thlr. werden in 1 Jahr 104 Thlr.
" " " " 2 " 108 " u. s. f.

Ein Wald wächst jährlich um 1 Proc. h.: aus 100 Klaftern werden in 1 Jahr 101, in 2 Jahren 102 u. s. f.

Eine Rechnung wird mit 4 Proc. Rabatt bezahlt h.: für 100 Thlr. Rechnung werden 96 Thlr. baar bezahlt.

Eine Geldsumme wird mit 5 Proc. jährigem Disconto ausgezahlt h.: 100 Thlr. in 1 Jahre fällig werden sogleich mit 95 bezahlt. Beim Rabatt und Disconto von 4 auf Hundert werden 104 Thlr. mit 100 bezahlt.

Louisd'ors geben 11 Proc. Agio h.: 100 Thlr. in Louisd'ors (zu 5 Thlr. Gold) gelten 111 Thlr. Courant.

Eine Sorte Papiergeld steht 87 Proc. h.: 100 Thlr. in diesem Papier gelten 87 Thlr. Courant.

An einer Waare werden 7 Proc. gewonnen h.: für 100 Thlr. Einkaufsgeld nimmt der Verkäufer 107 Thlr. ein. Werden dagegen 3 Proc. verloren, so nimmt er für 100 Thlr. Einkaufsgeld 97 Thlr. ein.

Bei einem Ballen oder Faß Waare sind 3 Proc. Tara h.: 100 Pfd. desselben (Brutto) enthalten 97 Pfd. Waare (Netto).

Atmosphärische Luft enthält dem Raum nach 21 Proc. Sauerstoff und 79 Proc. Stickstoff h.: 100 Raumeinheiten derselben bestehen aus 21 Raumeinheiten Sauerstoff und 79 Raumeinheiten Stickstoff.

Alkohol von 80 Proc. h. solcher, von dem 100 Raumeinheiten 20 Raumeinheiten Wasser enthalten.

Um das Verhältniß von zwei Größen anzugeben, sagt man bisweilen, die erste ist z. B. um 36 Proc. größer (oder kleiner) als die zweite, d. h. die erste enthält sovielmal 136 (oder 64) Einheiten, als die zweite 100 Einheiten hat.

Diese Erklärungen dienen zur Bildung der Obersätze bei den hierher gehörigen Aufgaben, deren Lösung keine eigenthümliche Schwierigkeit hat.

§. 7. Theilbarkeit der Zahlen.*)

1. Die natürlichen Zahlen sind theils einfach (Primzahlen), theils Vielfache kleinerer Zahlen (zusammengesetzt). Eine Zahl ist durch eine andere nur dann (ohne Bruch) theilbar, wenn sie aus ihr zusammengesetzt, von ihr ein Vielfaches ist. Die Vielfachen von 2

*) Vergl. im 2ten Buche §. 13.

heißen gerade, die übrigen ungerade Zahlen. Die Primzahlen sind, mit Ausnahme der 2, sämmtlich ungerade.

Um eine Tabelle der Primzahlen zu bilden*), schreibt man die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, . . auf, streicht 3×3 d. i. 9 und jede darauf folgende 3te Zahl (die Vielfachen der 3), dann 5×5 d. i. 25 und jede 5te Zahl (die Vielfachen der 5), dann 7×7 d. i. 49 und jede 7te Zahl u. s. f. (die bereits gestrichenen Zahlen mitgezählt). Die ungestrichen übriggebliebenen Zahlen sind die Primzahlen.

	3	5	7	(9)	11	13	(15)	17	19
(21)	23	(25)	(27)	29	31	(33)	(35)	37	(39)
41	43	(45)	47	(49)	(51)	53	(55)	(57)	59
16	(63)	(65)	67	(69)	71	73	(75)	(77)	79
(81)	83	(85)	(87)	89	(19)	(93)	(95)	97	(99)
101	103	(105)	107	109	(111)	113	(115)	(117)	(119)
(121)	(123)	(125)	127	(129)	131	(133)	(135)	137	139
(141)	(143)	(145)	(147)	149 u. s. w.					

Um vortheilhaft rechnen zu können, hat man die Beschaffenheit der kleinern Zahlen, z. B. bis 150, sich einzuprägen. Die Primzahlen darunter sind außer 2, 3, 5, 7 folgende:

11	13	17	19	.	83	.	89
.	23	.	29	.	.	97	.
31	.	37	.	101	103	107	109
41	43	47	.	.	113	.	.
.	53	.	59	.	.	127	.
61	.	67	.	131	.	137	139
71	73	.	79	.	.	.	149

Unter den zusammengesetzten Zahlen sind zu merken:

51	3×17	98	2×49	121	11×11
52	4×13	102	6×17	123	3×41
57	3×19	104	8×13	129	3×43
68	4×17	111	3×37	133	7×19
76	4×19	112	7×16	136	8×17
78	6×13	114	6×19	138	6×23
87	3×29	116	4×29	141	3×47
91	7×13	117	9×13	143	11×13
92	4×23	119	7×17	147	3×49

2. Eine zusammengesetzte Zahl kann als Product von lauter Primzahlen dargestellt werden. Aus dieser Darstellung der Zahl erkennt man ihre Divisoren (im engern Sinne) d. h. die Zahlen, durch welche sie theilbar ist, welche in ihr aufgehen.

---

*) Sieb des Eratosthenes nach der Mittheilung von Nikomachus Arithm. I, 17.

$$105 = 21 \times 5 = 3 \times 5 \times 7.$$
$$72 = 8 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3.$$

Demnach ist 105 nur theilbar durch die Primzahlen 3, 5, 7, und durch die zusammengesetzten Zahlen 3×5, d. i. 15, 3×7 d. i. 21, 5×7 d. i. 35.

72 hat die Divisoren 2, 2×2 d. i. 4, $2 \times 2 \times 2$ d. i. 8, 3, 3×3 d. i. 9, 2×3 d. i. 6, 2×9 d. i. 18, 4×3 d. i. 12, 4×9 d. i. 36, 8×3 d. i. 24.

Auch erkennt man aus der Zusammensetzung:

3		in 105 ist	5×7	d. i. 35mal	enthalten
5		⸗	3×7	⸗ 21 ⸗	⸗
7		⸗	3×5	⸗ 15 ⸗	⸗
15	d. i. 3×5	⸗	7	⸗	⸗
21	⸗ 3×7	⸗	5	⸗	⸗
35	⸗ 5×7	⸗	3	⸗	⸗

Ist eine Zahl einzeln durch 2 und 3 theilbar, so ist sie auch durch 2×3 d. i. 6 theilbar. Ist eine Zahl durch 6 und 7 theilbar, so ist sie es auch durch 6×7 d. i. 42.

Ist dagegen eine Zahl durch 4 und 6 theilbar, welche den Divisor 2 gemein haben, so kann man nicht behaupten, daß sie durch 4×6 d. i. 24 theilbar sei. Z. B. 84 ist durch 4 und durch 6 theilbar, aber nicht durch 4×6, sondern nur durch 4×3.

Um die Beschaffenheit einer Zahl zu untersuchen, dividirt man sie durch 2, 3, 5, 7 und die folgenden Primzahlen bis zu derjenigen, welche mit sich selbst multiplicirt mehr ist, als die gegebene Zahl. Z. B. 193 ist nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 theilbar. $17 \times 17 = 289$ übersteigt bereits 193; diese Zahl kann nicht Divisoren haben, die beide größer als 17 wären, und ist folglich eine Primzahl. Dagegen

$4680 : 2 = 2340$	$4680 = 2 \times 2340$
$2340 : 2 = 1170$	$2340 = 2 \times 1170$
$1170 : 2 = 585$	$1170 = 2 \times 585$
$585 : 3 = 195$	$585 = 3 \times 195$
$195 : 3 = 65$	$195 = 3 \times 65$
	$65 = 5 \times 13$
	$4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13.$

3. Daß eine Zahl durch 2, 3, 5, . . . theilbar ist oder nicht, vermag man an den Resten zu erkennen, welche 10, 100, 1000, . . durch jene Zahlen dividirt übrig lassen.

a) Eine Zahl durch 2 oder 5 dividirt giebt denselben Rest, als ihre letzte Stelle, z. B. $387 = 380 + 7$. Nun ist 10 durch 2 und 5 theilbar, folglich auch 380, mithin hängt der Rest nur von der letzten Stelle 7 ab.

b) Eine Zahl durch 4 oder 25 dividirt giebt denselben Rest als die zweistellige Zahl, mit der die Zahl endigt, z. B. 1852 = 1800 + 52. Nun ist 100 durch 4 und 25 theilbar, folglich auch 1800, mithin hängt der Rest nur von den beiden letzten Stellen 52 ab.

c) Eine Zahl durch 3 oder 9 dividirt giebt denselben Rest als ihre Quersumme, z. B. 2837 = 2000 + 800 + 30 + 7. Nun giebt 10, 100, 1000 . . . durch 3 oder 9 dividirt den Rest 1, also 20, 200, 2000 . . . den Rest 2 u. s. f., mithin giebt die obige Zahl denselben Rest als 7 + 3 + 8 + 2 d. i. 20, welche die Quersumme oder Ziffernsumme der Zahl heißt.

d) Eine Zahl durch 11 dividirt giebt denselben Rest als die Summe der 1ten, 3ten, 5ten, . . Ziffer weniger die Summe der 2ten, 4ten, 6ten, . . Ziffer, von rechts nach links gezählt.

Z. B. 79 345 = 70 000 + 300 + 5
+ 9000 + 40.

Nun giebt 100, 10 000, 1000 000, . . durch 11 dividirt den Rest 1, während bei 10, 1000, 100 000, . . 1 fehlt (am Aufgehen); folglich giebt 200, 20 000, 2000 000, . . den Rest 2, während bei 20, 2000, 200 000 . . . 2 fehlt, u. s. f. Also giebt die obige Zahl denselben Rest als 5 + 3 + 7 — 4 — 9 d. i. 2.

849 023 giebt denselben Rest als 3 + 0 + 4 — 2 — 9 — 8, oder (indem man 2 × 11 zulegt) als 29 — 19, d. i. 10. Die Zahl ist durch 11 theilbar, wenn jene Differenz 0, 11, 22, . . beträgt.

Die Auffindung der Reste einer Zahl bei andern Divisionen z. B. durch 7, 13, 17, u. s. w. auf dem angezeigten Wege ist weniger einfach und deshalb praktisch weniger wichtig. Dafür aber, daß eine Zahl Primzahl ist, giebt es kein einfaches Kennzeichen.

4. Um zu untersuchen, ob zwei gegebene Zahlen, deren Zusammensetzung unbekannt ist, einen gemeinschaftlichen Divisor haben, sucht man den Rest der größern Zahl in Bezug auf die kleinere, indem man jene durch diese dividirt, den Rest der kleinern in Bezug auf den vorigen Rest, den Rest des 1ten Restes in Bezug auf den 2ten, u. s. f. bis zum Rest 0. Ist der vorletzte Rest 1, so haben die Zahlen keinen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor und heißen prim zu einander (relative Primzahlen). Ist aber der vorletzte Rest von 1 verschieden, so ist er der größte gemeinschaftliche Divisor der beiden gegebenen Zahlen Z. B. 2812 und 1292:

2812	giebt	in	Bezug	auf	1292	den	Rest	228
1292	=	=	=	=	228	=	=	152
228	=	=	=	=	152	=	=	76
152	=	=	=	=	76	=	=	0

Schema:

2)	2812	1292	(5
	2584	1140	
1)	228	152	(2
	152	152	
	76	0	

Daher sind 2812 und 1292 durch 76 theilbar. Denn 76 geht auf

in 152	also auch in 152 + 76 d. i.	228,
= 228 × 5 d. i. 1140	= = = 1140 + 152 =	1292,
= 1292 × 2 = 2584	= = = 2584 + 228 =	2812.

In der That ist

2812 : 76 = 37.	1292 : 76 = 17.
228	76
532	532
532	532
0	0

Eine Zahl aber, welche in 2812 und 1292 aufgeht, geht auch auf

in 1292 × 2 d. i. 2584,	und in 2812—2584 d. i.	228,
= 228 × 5 = 1140,	= = 1292—1140 =	152,
	= = 228— 152 =	76,

und kann demnach nicht mehr als 76 betragen.

Bei den Zahlen 389 und 143 findet man als vorletzten Rest 1. Diese Zahlen haben also keinen gemeinschaftlichen Divisor, der mehr als 1 ist, und sind prim zu einander.

2)	389	143	(1
	286	103	
2)	103	40	(1
	80	23	
1)	23	17	(2
	17	12	
1)	6	5	(5
	5	5	
	1	0	

Daß man auf dem angezeigten Wege endlich den Rest 0 finden muß, ergiebt sich daraus, daß die folgenden Reste immer geringer werden.

Die größte Zahl, welche in jeder von 3 gegebenen Zahlen aufgeht, geht in dem größten gemeinschaftlichen Divisor eines Paares auf. Berechnet man also den größten gemeinschaftlichen Divisor von 2 unter den gegebenen Zahlen, und wiederum den größten gemeinschaftlichen Divisor der gefundenen Zahl und der 3ten Zahl, so ist die zuletzt gefundene Zahl der größte gemeinschaftliche Divisor der 3 gegebenen Zahlen. U. s. w.

5. Unter einem **Dividuus** einer Zahl versteht man ein Vielfaches derselben, in welchem die gegebene Zahl aufgeht. Der **kleinste gemeinschafliche** Dividuus von 2 relativen Primzahlen ist ihr Product, z. B. die kleinste Zahl, in der sowohl 12 als 35 aufgeht, ist 12 × 35. Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der Zahlen 12 und 27, deren größter gemeinschaftlicher Divisor 3 ist, wird gefunden, indem man

12 mit dem 3ten Theil von 27 multiplicirt; 4×3 und 9×3 gehen in 12×9 auf.

Die kleinste Zahl, welche durch jede von 3 gegebenen Zahlen theilbar ist, ist durch den kleinsten gemeinsamen Dividuus eines Paares theilbar. Wenn man also den kleinsten gemeinsamen Dividuus von 2 unter den gegebenen Zahlen berechnet, und wiederum den kleinsten gemeinsamen Dividuus der gefundenen Zahl und der 3ten Zahl, so hat man den kleinsten gemeinsamen Dividuus der 3 gegebenen Zahlen. U. s. w.

§. 8. Von den Brüchen.

1. Ein **Bruch** ist der Quotient des Zählers durch den Nenner; er enthält so viel gleiche Theile als der Zähler angiebt, deren so viel auf eine Einheit gehen, als der Nenner angiebt, z. B. $\frac{5}{7} = 5 : 7$ und enthält 5 solche Theile, deren 7 auf eine Einheit gehen (§. 3, 3).

2. Der Bruch heißt

echt, wenn der Zähler kleiner als der Nenner, z. B. $\frac{5}{7}$.
unecht, " " " größer " " " " " $\frac{9}{7}$.

Ein Bruch wie $\frac{7}{7}$, $\frac{14}{7}$, $\frac{21}{7}$, . . ., dessen Zähler dem Nenner gleich oder ein Vielfaches desselben ist, wird ein **uneigentlicher** genannt. Ein echter Bruch ist weniger als 1, ein unechter Bruch ist mehr als 1, ein uneigentlicher Bruch ist einer ganzen Zahl gleich.

Ein unechter Bruch kann in eine ganze Zahl und einen echten Bruch (eine **gemischte Zahl**) zerlegt werden. Eine gemischte Zahl kann in einen unechten Bruch **eingerichtet** werden. Z. B.

$$\frac{347}{36} = 347 : 36 = 9\frac{23}{36}, \qquad \begin{array}{r} 324 \\ \hline 23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28\frac{19}{36} \\ \hline 84 \\ 168 \\ 19 \\ \hline = \frac{1027}{36} \end{array}$$

Nämlich 1 giebt $\frac{36}{36}$, 28 giebt $\frac{28 \times 36}{36}$, $28\frac{19}{36}$ giebt $\frac{28 \times 36 + 19}{36}$. Eine gemischte Zahl ist wie eine mehrfach benannte Zahl anzusehen, das Einrichten entspricht dem Resolviren, das Zerlegen dem Reduciren (§. 4, 2).

3. Ein Bruch kann ohne Aenderung seines Werthes anders ausgedrückt werden, wenn man die Theile der Einheit, deren einen oder mehrere der Bruch enthält, wiederum eintheilt; z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \cdots$$
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \cdots$$
$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{20}{28} = \frac{25}{35} \cdots$$

indem man jeden der 2, 3, 7 Theile der Einheit in 2, 3, 4, 5, . . gleiche Theile theilt, wodurch Zähler und Nenner 2, 3, 4, 5, . . mal so groß werden.

Man kann also den Zähler und den Nenner eines Bruches mit derselben beliebigen Zahl multipliciren, z. B.

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 7}{8 \times 7} = \frac{35}{36}.$$

8tel können in 144tel verwandelt werden, weil 144 durch 8 theilbar ist; man multiplicirt den Zähler und den Nenner mit 144 : 8. Dagegen können 8tel nicht genau in 108tel verwandelt werden, weil 8 in 108 nicht aufgeht.

Umgekehrt kann man auch den Zähler und den Nenner eines Bruches durch dieselbe beliebige Zahl dividiren, z. B.

$$\frac{26}{65} = \frac{26 : 13}{65 : 13} = \frac{2}{5}.$$

Man kürzt den Ausdruck des Bruches, indem man seinen Zähler und Nenner durch einen gemeinschaftlichen Divisor derselben dividirt. Ist der Zähler prim zum Nenner (§. 7, 4), so hat der Bruch seinen einfachsten und anschaulichsten Ausdruck.

Da 1 Fuß = 12 Zoll = 12 $\times$ 12 d. i. 144 Linien, so sind
1 Zoll = $\frac{1}{12}$ Fuß, 1 Linie = $\frac{1}{12}$ Zoll = $\frac{1}{144}$ Fuß,
3 Zoll = $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ Fuß, 8 Linien = $\frac{8}{12}$ oder $\frac{2}{3}$ Zoll,
7 Zoll 6 Linien = 90 Linien = $\frac{90}{144}$ d. i. $\frac{5}{8}$ Fuß, u. s. w.

$\frac{4}{7}$ kann näherungsweise in 12tel verwandelt werden, indem man beiderseits mit 12 multiplicirt und (näherungsweise) durch 7 dividirt:

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 12}{7 \times 12} = \frac{48 : 7}{12} = \frac{7}{12} \text{ genauer als } \frac{6}{12} \text{ (§. 3, 4).}$$

Man kann die Umformung der Brüche auch durch die Bemerkung erläutern, daß 7 $\times$ 9 in 5 $\times$ 9, wie 7 Thlr. in 5 Thlrn., ebensovielmal enthalten ist, als 7 in 5 (§. 3, 2), daß folglich $\frac{45}{63} = \frac{5}{7}$ ist.

Die Umformung von Brüchen durch Division kommt besonders bei der Multiplication und Division der Brüche in Anwendung. Durch gehörige Multiplication ihrer Nenner und Zähler werden die Brüche auf denselben Nenner gebracht, und damit zur Vergleichung, so wie zur Addition und Subtraction geeignet.

§. 9. Addition und Subtraction der Brüche.

1. Brüche von demselben Nenner werden addirt oder subtrahirt, indem man die Zähler addirt oder subtrahirt. Z. B. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$, weil 2 Theile + 3 Theile, deren 7 auf eine Einheit gehen, 5 solche Theile sind.

$$2\tfrac{3}{5} + 3\tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{5} + 2 + 3 = 6.$$

$$\tfrac{9}{11} - \tfrac{4}{11} = \frac{9-4}{11} = \tfrac{5}{11},$$

$$1 - \tfrac{3}{8} = \tfrac{8}{8} - \tfrac{3}{8} = \tfrac{5}{8}.$$

$6\tfrac{2}{7} - 4\tfrac{4}{7} = 1\tfrac{5}{7}$. Man subtrahirt $4\tfrac{4}{7}$ von 5 und addirt die gefundenen $\tfrac{3}{7}$ zu $1\tfrac{2}{7}$.

2. Brüche von verschiedenen Nennern werden addirt oder subtrahirt, nachdem sie auf denselben Nenner gebracht worden (§. 8, 3).

Die Brüche $\tfrac{3}{5}$ und $\tfrac{4}{7}$ erhalten beide den Nenner 5×7 d. i. 35, wenn man den Nenner und den Zähler bei dem ersten mit 7, bei dem zweiten mit 5 multiplicirt (§. 8, 3). Die statt der Brüche $\tfrac{3}{5}$ und $\tfrac{4}{7}$ gefundenen $\tfrac{21}{35}$ und $\tfrac{20}{35}$ können addirt und subtrahirt werden.

Die Brüche $\tfrac{7}{12}$ und $\tfrac{3}{4}$, wovon der Nenner 4 im Nenner 12 aufgeht, brauchen nicht einen größeren Nenner als 12 zu erhalten, weil

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 3}{4 \,.\, 3} = \frac{9}{12}.$$

Die Brüche $\tfrac{7}{12}$ und $\tfrac{5}{9}$, deren Nenner den gemeinschaftlichen Divisor 3 haben, brauchen nicht auf den Nenner 12×9, sondern nur auf den Nenner 12×3 d. i. 36 gebracht zu werden, indem man bei dem ersten Bruch mit 36 : 12 d. i. 3, bei dem zweiten mit 36 : 9 d. i. 4 den Nenner und den Zähler multiplicirt. So erhält man statt $\tfrac{7}{12}$ und $\tfrac{5}{9}$ die gleichnamigen Brüche $\tfrac{21}{36}$ und $\tfrac{20}{36}$.

3. Der kleinste Nenner, auf welchen mehrere Brüche gebracht werden können (Generalnenner), ist der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der einzelnen Nenner (§. 7, 4). Um denselben unmittelbar zu berechnen, läßt man die Nenner unbeachtet, welche in andern Nennern aufgehen, und multiplicirt die gemeinschaftlichen Divisoren der übrigen Nenner mit den besondern Divisoren derselben. Es seien z. B. die Nenner der Brüche

18 12 15 6 24 35 10 4 21 105 56.

Man streicht 6, 4, 12, weil sie in 24 aufgehen, und 15, 21, 35, weil sie in 105 aufgehen. (Eine Unterlassung in dieser Hinsicht bringt keinen Fehler.) Von den Nennern

18 24 10 105 56

haben 18, 24, 10, 56 den gemeinschaftlichen Divisor 2, und ihr gemeinschaftlicher Nenner ist 2mal so groß, als ihn die Nenner

9 12 5 105 28

erfordern. Hiervon fällt der Nenner 5 weg, weil er in 105 aufgeht. Von den Nennern

9 12 105 28

haben 12 und 28 den gemeinschaftlichen Factor 2. Ihr Generalnenner ist 2mal so groß als der für die Nenner

9 6 105 14

erforderliche, welcher wiederum 2mal so groß ist als der, auf welchen die Nenner

9 3 105 7

gebracht werden können. Von diesen bleiben 3 und 7 unbeachtet, weil sie in 105 aufgehen. Die Nenner 9 und 105 haben aber den gemeinschaftlichen Divisor 3, und erfordern den gemeinschaftlichen Nenner 3 $\times$ 3 $\times$ 35, mithin ist der gesuchte kleinste Generalnenner $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520$.

Schema:											
18	(12)	(15)	(6)	24	(35)	10	(4)	(21)	105	56	(2
9				12		(5)			105	28	(2
9				6					105	14	(2
9				(3)					105	(7)	(3
3									35		

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520.$

Man hebt nur einfache gemeinschaftliche Divisoren (2, 3, 5, 7 . . .) in aufsteigender Ordnung aus, um nicht möglicherweise durch unnöthige Factoren den Generalnenner zu vergrößern.

Um für die einzelnen Brüche die Zahlen zu finden, mit denen die Zähler wie die Nenner zu multipliciren sind, kann man die §. 7, 2 gemachten Bemerkungen benutzen.

18	d. i.	$2 \times 3 \times 3$	in 2520 ist	$2 \times 2 \times 5 \times 7$	d. i.	140mal enth.
12	" "	$2 \times 2 \times 3$	" " "	$2 \times 3 \times 5 \times 7$	" "	210 " "
15	" "	3×5	" " "	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$	" "	168 " "
6	" "	2×3	" " "	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	" "	420 " "
24	" "	$2 \times 2 \times 2 \times 3$	" " "	$3 \times 5 \times 7$	" "	105 " "
35	" "	5×7	" " "	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$	" "	72 " "
10	" "	2×5	" " "	$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$	" "	252 " "
4	" "	2×2	" " "	$2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$	" "	630 " "
21	" "	3×7	" " "	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$	" "	120 " "
105	" "	$3 \times 5 \times 7$	" " "	$2 \times 2 \times 2 \times 3$	" "	24 " "
56	" "	$2 \times 2 \times 2 \times 7$	" " "	$3 \times 3 \times 5$	" "	45 " "

Beispiel.

$15\frac{13}{21}$	52	676
$+ 13\frac{37}{39}$	28	1036
$+ 28\frac{19}{52}$	21	399
$+ 35\frac{7}{12}$	91	637

(Übertrag: 22)

2748 : 1092
2184

93 . . . . $\frac{564}{1092}$ od. $\frac{47}{91}$

21	39	52	12	(2
21	39	26	6	(2
21	39	(13)	(3)	(3
7	13			

$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 13 = 1092.$

1092 : 21 = 52, $13 \times 52 = 676$.
" 39 = 28, $37 \times 28 = 1076$.
" 52 = 21, $19 \times 21 = 399$.
" 12 = 91, $7 \times 91 = 637$.

$\frac{13}{21} = \frac{13 \cdot 52}{21 \cdot 52} = \frac{676}{1092}$ u. s. w.

$\frac{2748}{1092} = 2\frac{564}{1092}$, welcher Bruch verkürzt werden kann, indem beiderseits durch 4 und durch 3, also durch 12 dividirt wird.

Oder:

	$15\frac{13}{21}$	4	52 : 84
+	$35\frac{7}{12}$	7	49
	1		101
			84
	51 . . . $\frac{17}{84}$		

	$13\frac{37}{39}$	4	148 : 156
+	$28\frac{19}{52}$	3	57
	1		205
			156
	42 . . . $\frac{49}{156}$		

	$51\frac{17}{84}$	13	221 : 1092
+	$42\frac{49}{156}$	7	343
	93 . . . $\frac{564}{1092}$ od. $\frac{47}{91}$		

	$93\frac{47}{91}$	3	141 : 273
—	$15\frac{13}{21}$	13	169
	77 . . . . $\frac{245}{273}$		

	$77\frac{245}{273}$		245 : 273
—	$13\frac{37}{39}$	7	259
	63 . . . $\frac{259}{273}$ od. $\frac{37}{39}$		

	$63\frac{37}{39}$	4	148 : 156
—	$28\frac{19}{52}$	3	57
	35 . . . $\frac{91}{156}$ od. $\frac{7}{12}$		

Man subtrahirt $\frac{169}{273}$ von 1 d. i. $\frac{273}{273}$, und addirt die Differenz zu $\frac{141}{273}$, u. s. w.

§. 10. Multiplication und Division eines Bruches durch ganze Zahlen.

1. Um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, multiplicirt man den Zähler; z. B. $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$. Denn 3 Theile, deren 4 auf eine Einheit gehen, 5mal genommen, sind 3×5 solche Theile. Oder: den 4ten Theil von 3 erhält man 5mal, indem man den 4ten Theil von 3×5 nimmt.

Der zu berechnende Bruch ist vor der Berechnung so viel als möglich zu verkürzen (§. 8, 3), z. B.

$$\frac{3}{8} \times 12 = \frac{3 \times 12}{8} = \frac{3 \times 3}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

$$\frac{3}{4} \times 8 = \frac{3 \times 8}{4} = 3 \times 2 = 6.$$

$\frac{3}{8} \times 8 = 3$, d. h. Bruch $\times$ Nenner $=$ Zähler, weil der Bruch der Quotient des Zählers durch den Nenner ist, und Quotient $\times$ Divisor $=$ Dividendus (§. 3, 1).

Um eine gemischte Zahl zu multipliciren, multiplicirt man entweder den Bruch und die ganze Zahl und addirt die Producte, oder man richtet die gemischte Zahl ein und verfährt wie oben.

Z. B. $86\frac{9}{26} \times 48$

16	216 : 13
688	86
344	$\frac{8}{13}$
4144	

oder: $86\frac{9}{26} \times 48$

172
516
9

$$\frac{2245 \times 48}{26} = \frac{2245 \times 24}{13}$$

4490
8980
53880 : 13 = $4144\frac{8}{13}$.
18
58
60
8

Eben so bei mehrfach benannten Zahlen.

2. Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, multiplicirt man den Nenner; z. B.

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$$ (zu lesen: „3 durch 4mal 5").

Theilt man die 4tel einer Einheit in je 5 gleiche Theile, mithin die Einheit in 4×5 d. i. 20 Theile, so erhält man $\frac{1}{20}$ als 5ten Theil von $\frac{1}{4}$, und $\frac{3}{20}$ als 5ten Theil von $\frac{3}{4}$. In der That giebt der Quotient $\frac{3}{4 \times 5}$ oder $\frac{3}{20}$, multiplicirt mit dem Divisor 5, den Dividendus $\frac{3}{4}$ (§. 3, 1).

Der zu berechnende Bruch ist vor der Berechnung soviel als möglich zu verkürzen, z. B.

$$\frac{25}{28} : 15 = \frac{25}{28 \times 15} = \frac{5}{28 \times 3} = \frac{5}{84}$$

$$\frac{15}{28} : 25 = \frac{1}{28}, \qquad \frac{25}{28} : 5 = \frac{5}{28}.$$

Man kann den Zähler sofort dividiren, wenn kein Rest bleibt.

Um eine gemischte Zahl zu dividiren, dividirt man die ganze Zahl, wenn sie größer ist als der Divisor, richtet die als Rest verbliebene gemischte Zahl ein und verfährt wie vorher. Man kann auch die gegebene gemischte Zahl einrichten und wie oben verfahren.

Z. B. $826\frac{5}{8} : 17 = 48\frac{5}{8}$ oder: $\dfrac{826\frac{5}{8} : 17}{}\ \dfrac{6613}{8 \times 17} = \frac{389}{8} = 48\frac{5}{8}$

$$\begin{array}{l} 68 \\ \hline 146 \\ 136 \\ \hline 10\frac{5}{8} : 17 = \dfrac{85}{8 \times 17} \end{array}$$

$52\frac{26}{43} : 39 = 4\frac{2}{43} : 3$, indem man beide Theile der gemischten Zahl und den Divisor durch 13 dividirt.

Um 18 Sgr. $7\frac{1}{5}$ Pf. auf einen Thalerbruch zu reduciren, sagt man zunächst: $7\frac{1}{5}$ Pf. $= 7\frac{1}{5} : 12$ Sgr. $= \frac{3}{5}$ Sgr. Dann $18\frac{3}{5}$ Sgr. $= 18\frac{3}{5} : 30$ Thlr. $= \frac{31}{50}$ Thlr. Um $\frac{25}{36}$ Thaler zu resolviren, sagt man nun kürzer als §. 4 gezeigt wurde:

$\frac{25}{36}$ Thlr. $= \frac{25}{36} \times 30$ Sgr. $= \frac{125}{6}$ d. i. $20\frac{5}{6}$ Sgr., und $\frac{5}{6}$ Sgr. $= \frac{5}{6} \times 12$ Pf. $= 10$ Pf., daher $\frac{25}{36}$ Thlr. $= 20$ Sgr. 10 Pf.

§. 11. Multiplication und Division durch einen Bruch.

1. Anstatt des ausführlichern Ausdrucks „den 4ten Theil einer Größe 3mal nehmen" gebraucht man den kürzern „$\frac{3}{4}$ (von) der Größe nehmen" oder „die Größe $\frac{3}{4}$mal nehmen," obgleich ein Multiplicator ur-

sprünglich nur eine ganze Zahl sein kann (§. 2, 3). Z. B. $\frac{3}{4}$ von 5 Ctr. sind $\frac{3 \times 5}{4}$ d. i. $3\frac{3}{4}$ Ctr. Bei dem Ausdruck „$\frac{3}{4}$ von 5 Ctr." ist nicht etwa an Subtrahiren von einem Minuendus zu denken. Bestimmter sagt man: $\frac{3}{4}$mal 5 Ctr.

Mit einem Bruche multipliciren ist daher: durch den Nenner dividiren, und den Quotienten mit dem Zähler multipliciren; oder mit dem Zähler multipliciren und das Product durch den Nenner dividiren. Z. B. Um eine Größe mit $\frac{3}{4}$ zu multipliciren, kann man entweder die Größe durch 4 dividiren und den Quotienten mit 3 multipliciren, oder die Größe mit 3 multipliciren und das Product durch 4 dividiren. Denn der 4te Theil der 3fachen Größe ist 3mal so groß als der 4te Theil der einfachen Größe.

Um die jährlichen Zinsen eines Capitals zu 4 Procent zu berechnen, hat man, weil 100 Thlr. Capital 4 Thlr. Zinsen geben, mithin 1 Thlr. Capital $\frac{4}{100}$ Thlr. Zinsen (§. 6), das Capital mit $\frac{4}{100}$, bei 5 Proc. mit $\frac{5}{100}$, bei $3\frac{1}{2}$ Proc. mit $3\frac{1}{2} : 100$ d. i. $\frac{7}{200}$ zu multipliciren. Der Ausdruck Procent vertritt den Nenner 100.

2. Um einen Bruch mit einem Bruch zu multipliciren, multiplicirt man den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner. Z. B.

$$\tfrac{3}{4} \times \tfrac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \tfrac{15}{28}.$$

Denn $\frac{3}{4} : 7$ oder $\frac{3}{4 \times 7}$ mit 5 multiplicirt giebt $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$ (zu lesen: „3mal 5 durch 4mal 7"). Oder $\frac{3}{4} \times 5$ d. i. $\frac{3 \times 5}{4}$ durch 7 dividirt giebt $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$ wie vorhin.

$$\tfrac{12}{25} \times \tfrac{15}{16} = \frac{12 \times 15}{25 \times 16} = \frac{3 \times 3}{5 \times 4} = \tfrac{9}{20}.$$

$$\tfrac{7}{12} \times \tfrac{4}{21} = \frac{7 \times 4}{12 \times 21} = \frac{1}{3 \times 3} = \tfrac{1}{9}.$$

$$\tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{4} = \frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \tfrac{1}{4}.$$

$$\tfrac{7}{90} \times \tfrac{8}{21} \times \tfrac{3}{8} \times 20 = \frac{7 \times 8 \times 3 \times 20}{90 \times 21 \times 8} = \tfrac{2}{9}.$$

Um mit einer gemischten Zahl zu multipliciren, multiplicirt man entweder mit dem Bruch und mit der ganzen Zahl und addirt die Producte, oder man richtet die gemischte Zahl ein und multiplicirt mit dem unechten Bruche.

Z. B. $45\frac{3}{4} \times 17\frac{2}{3} =$

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$
$45 \times \frac{2}{3}$		30
$\frac{3}{4} \times 17$		$12\frac{3}{4}$
45×17		315
		45
	$=$	$808\frac{1}{4}$

Oder: $45\frac{3}{4} \times 17\frac{2}{3} = \frac{183 \times 53}{4 \times 3} = 61 \times 53 : 4$

$$\begin{array}{r} 53 \\ 318 \\ \hline 3233 : 4 = 808\tfrac{1}{4}. \end{array}$$

$$2\tfrac{1}{12} \times 3\tfrac{2}{5} \times 2\tfrac{1}{4} \times 3\tfrac{1}{17} = \frac{35 \times 17 \times 9 \times 52}{12 \times 5 \times 4 \times 17} = \frac{7 \times 3 \times 13}{4} = 68\tfrac{1}{4}.$$

Um eine mehrfach benannte Zahl, welche einen Bruch enthält, mit $27\frac{2}{5}$ zu multipliciren, berechnet man den 5ten Theil derselben, multiplicirt diesen mit 2, sowie die gegebene Zahl mit 27 und addirt die Producte; oder man multiplicirt den 5ten Theil sofort mit 137. Auch kann man die gegebene Zahl resolviren, mit $\frac{137}{5}$ multipliciren und das Product reduciren. Z. B.

18 Ctr. 57 Pfd. $19\frac{5}{7}$ Loth $\times 27\frac{2}{5}$.

3 =	77 =	$16\frac{26}{35}$ =			3 = 77 = 16 $\frac{26}{35}$ = $\times$ 2		
18 =	57 =	19 $\frac{5}{7}$ =	: 5		1	1	1 52
3	330	64			6	154	35
	387	83			7 =	155	$\frac{17}{35}$ =
	37	33				45 =	
	2	3 $\frac{5}{7} = \frac{26}{7}$					

18 =	57 =	19	$\frac{5}{7}$ = $\times$ 27
14	16	19	135 : 7
216	399	243	65
27	114	27	$\frac{2}{7}$ =
500 =	1555	532	
	45	32	
	15 =	212	
		192	
		20 =	

7 =	45 =	$1\frac{17}{35}$ =
500 =	15 =	$20\frac{2}{7}$ =
507 Ctr.	60 Pfd.	$21\frac{27}{35}$ Loth.

Oder: 3 Ctr. 77 Pfd. 16 $\frac{26}{35}$ Loth × 137

96	71	101	822
411	959	822	274
507 =	959	137	3562 : 35
	10620	2239	62
	72	224	35
	60 =	53	$\frac{27}{35}$
		32	
		21	

Oder: 18 Ctr. 57 Pfd. 19$\frac{5}{7}$ Loth.

1980
57
2037 Pfd.
6111
4074
19$\frac{5}{7}$
65203$\frac{5}{7}$ Loth.

$\frac{456426}{7}$ Loth. × $\frac{137}{5}$

456426
1369278
3194982

62530362 ℒ : 35 = 1786581 ℒ : 32 = 55830 ℔ : 110 = 507 Ctr.

35	160	83
275	186	60 ℔.
245	160	
303	265	
280	256	
230	98	
210	96	
203	21 Loth.	
175		
286		
280		
62		
35		
$\frac{27}{35}$		

3. Um durch einen Bruch zu dividiren, multiplicirt man mit dem umgekehrten (reciproken) Bruch; z. B.

$$3 : \tfrac{4}{5} = 3 \times \tfrac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{4} = 3\tfrac{3}{4}.$$

Die Aufgabe, 3 durch $\frac{4}{5}$ zu dividiren, entspringt zunächst daraus, daß man das Verhältniß von 3 zu $\frac{4}{5}$ sucht, d. h. fragt, wievielmal $\frac{4}{5}$ in 3

enthalten ist. Nun ist $3 = \frac{3 \times 5}{5}$ und $\frac{4}{5}$ in $\frac{3 \times 5}{5}$ sovielmal enthalten als 4 in 3×5, nämlich $\frac{3 \times 5}{4}$mal. Es entsteht aber $\frac{3 \times 5}{4}$ dadurch aus 3, daß man mit dem Bruche $\frac{5}{4}$ multiplicirt, welcher durch Umkehrung des Bruches $\frac{4}{5}$ gebildet ist.

Zu demselben Ziele führt die Ueberlegung: $\frac{1}{5}$ in 1 ist 5mal, $\frac{4}{5}$ in 1 ist den 4ten Theil soviel d. i. $\frac{5}{4}$mal, $\frac{4}{5}$ in 3 ist 3mal soviel d. i. $\frac{5 \times 3}{4}$mal enthalten u. s. w.

Die Richtigkeit des Quotienten $3 \times \frac{5}{4}$ bestätigt sich, indem er mit dem Divisor $\frac{4}{5}$ multiplicirt den Dividendus 3 giebt (§. 3, 1).

Eben so ist $3\frac{2}{7} : \frac{4}{5} = 3\frac{2}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{23 \times 5}{7 \times 4} = \frac{115}{28} = 4\frac{3}{28}$, weil $3\frac{2}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = 3\frac{2}{7}$. (Um den Quotienten auf dem andern Wege zu finden, müßte man die Brüche auf denselben Nenner bringen.)

$3\frac{2}{7} : \frac{1}{5} = 3\frac{2}{7} \times 5, \quad 1 : \frac{1}{5} = 5, \quad 1 : \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$, u. s. w.

4. Um durch eine gemischte Zahl zu dividiren, muß man sie einrichten und mit dem umgekehrten Bruch multipliciren. Z. B.

$$3 : 5\frac{7}{8} = 3 : \frac{47}{8} = 3 \times \frac{8}{47} = \frac{24}{47}.$$

$$3\frac{5}{7} : 5\frac{7}{8} = \frac{26 \times 8}{7 \times 47} = \frac{208}{329}.$$

Es ist $3 : 5\frac{7}{8}$ weniger als $3 : 5$, weil der Divisor $5\frac{7}{8}$ mehr als 5 ist. Mit den Theilen des gemischten Divisors kann nicht ohne Weiteres gerechnet werden.

Die Aufgabe: 7 Thlr. 13 Sgr. durch $2\frac{5}{6}$ zu dividiren, den Quotienten mit $5\frac{1}{3}$ zu multipliciren, das Product durch $5\frac{2}{5}$ zu dividiren und den Quotienten mit $1\frac{4}{5}$ zu multipliciren, — wird nach §. 10 bezeichnet

$$\frac{7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times 5\frac{1}{3} \times 1\frac{4}{5}}{2\frac{5}{6} \times 5\frac{2}{5}}$$

und giebt nach Anwendung der vorstehenden Regeln

$$\frac{7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times 6 \times 16 \times 5 \times 9}{17 \times 3 \times 27 \times 5}$$

oder verkürzt

$$\frac{7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times 2 \times 16}{17 \times 3} = 7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times \frac{32}{51}.$$

Der Ausdruck „durch einen Bruch dividiren" ist nicht weniger künstlich, als der Ausdruck „mit einem Bruche multipliciren," wenn der Quotient einen Theil des Dividendus bedeuten soll. Der Ausdruck „eine Größe durch $\frac{4}{5}$ dividiren" oder „den $\frac{5}{4}$ten Theil der Größe nehmen" ist aber gleichberechtigt und nach dem Obigen gleich-

bedeutend mit dem Ausdrucke „die Größe $\frac{5}{4}$mal nehmen" (§. 3, 3). Daß eine Zahl durch einen echten Bruch dividirt größer wird, ist ebenso wenig befremdlich, als daß sie mit einem echten Bruch multiplicirt kleiner wird.

§. 12. Einfache und zusammengesetzte Regel de tri mit Brüchen.

1. Die in §. 5 aufgestellten Sätze behalten ihre Geltung, wenn man statt der dort vorkommenden ganzen Zahlen Brüche oder gemischte Zahlen einführt.

Z. B. $\frac{1}{7}$ Pfd. kostet den 7ten Theil soviel als 1 Pfd., und $\frac{4}{7}$ Pfd. kosten 4mal den 7ten Theil soviel als 1 Pfd., wofür nach §. 11, 1 gesagt wird:

$\frac{4}{7}$ Pfd. kosten $\frac{4}{7}$mal soviel als 1 Pfd.

eben so wie man sagte:

5 Pfd. kosten 5mal soviel als 1 Pfd.

Ferner kostet 1 Pfd. 9mal soviel als $\frac{1}{9}$ Pfd., 5 Pfd. 9mal soviel als $\frac{5}{9}$ Pfd., daher kostet 1 Pfd. 9mal den 5ten Theil soviel d. i. $\frac{9}{5}$mal soviel als $\frac{5}{9}$ Pfd. Mit $\frac{9}{5}$ multipliciren ist aber dasselbe, als durch $\frac{5}{9}$ dividiren oder den $\frac{5}{9}$ten Theil nehmen (§. 11, 4); daher kann man den Satz

1 Pfd. kostet $\frac{9}{5}$mal soviel als $\frac{5}{9}$ Pfd.

auch wie folgt aussprechen:

1 Pfund kostet den $\frac{5}{9}$ten Theil soviel als $\frac{5}{9}$ Pfd.

eben so wie man bei ganzen Zahlen sagte:

1 Pfd. kostet den 6ten Theil soviel als 6 Pfd.

Die einzelnen Sätze der Regel de tri (§. 6) lassen sich daher mit Brüchen genau eben so aufstellen, als mit ganzen Zahlen.

Aufgabe.

$9\frac{3}{5}$ Ctr. Waare kosten 472 Thlr. 20 Sgr., wieviel werden $34\frac{2}{7}$ Ctr. kosten?

Aufl. $9\frac{3}{5}$ Ctr. kosten 472 Thlr. 20 Sgr.

1 Ctr. kostet den $9\frac{3}{5}$ten Theil soviel d. i.

$$\frac{472 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.}}{9\frac{3}{5}}$$

$34\frac{2}{7}$ Ctr. kosten $34\frac{2}{7}$mal soviel d. i.

$$\frac{472 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.} \times 34\frac{2}{7}}{9\frac{3}{5}}$$

Ausr. $\frac{472 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr. } \times 240 \times 5}{7 \times 48} = \frac{118 \text{ Thlr. } 5 \text{ Sgr. } \times 100}{7}$

$= 11816$ Thlr. 20 Sgr. : $7 = 1688$ Thlr. $2\frac{6}{7}$ Sgr.

Antw. $34\frac{2}{7}$ Ctr. kosten 1688 Thlr. $2\frac{6}{7}$ Sgr.

Aufgabe.

Ein Forst ist 17 Jahre lang um $1\frac{3}{4}$ Proc. seines anfänglichen Bestandes jährlich gewachsen und hält 16608 Klaftern. Wie groß war der anfängliche Bestand?

Aufl. Aus 100 Klaftern wurden in 1 Jahr $100 + 1\frac{3}{4}$, in 2 Jahren $100 + 1\frac{3}{4} \times 2$, in 17 Jahren $100 + 1\frac{3}{4} \times 17$ d. i. $129\frac{3}{4}$ Klaftern. Weil nach dem anfänglichen Bestand gefragt ist, so sagt man:

$129\frac{3}{4}$ Klaftern sind aus 100 Klaftern entstanden,

1 „ „ „ $\frac{100 \text{ Kl.}}{129\frac{3}{4}}$ „

16608 „ „ „ $\frac{100 \text{ Kl.} \times 16608}{129\frac{3}{4}}$ „

Ausr. $\frac{100 \text{ Kl.} \times 16608 \times 4}{519} = 100 \text{ Kl.} \times 32 \times 4 = 12800$ Kl.

Antw. Der anfängliche Bestand war 12800 Klaftern.

Aufgabe.

Als der Scheffel Korn $4\frac{3}{4}$ Thlr. kostete, erhielt man für 10 Sgr. $7\frac{1}{2}$ Pfd. Brod; wieviel erhält man, wenn der Scheffel $3\frac{1}{3}$ Thlr. kostet?

Aufl. Bei $4\frac{3}{4}$ Thlr. Kornpreis erhielt man $7\frac{1}{2}$ Pfd. Brod.

„ 1 „ „ „ „ $7\frac{1}{2}$ Pfd. $\times 4\frac{3}{4}$

„ $3\frac{1}{3}$ „ „ „ „ $\frac{7\frac{1}{2} \text{ Pfd.} \times 4\frac{3}{4}}{3\frac{1}{3}}$

Ausr. $\frac{15 \text{ Pfd.} \times 19 \times 3}{2 \times 4 \times 10} = 10$ Pfd. 22 Loth.

Antw. Wenn der Scheffel Korn $3\frac{1}{3}$ Thlr. kostet, so erhält man für 10 Sgr. 10 Pfd. 22 Loth Brod.

Aufgabe.

Ein Ochs auf der Weide an einem $7\frac{1}{2}$ Fuß langen Seile frißt in 2 Tagen das Gras ab, welches er erreichen kann. Wieviel Tage kommt er aus, wenn das Seil $13\frac{3}{4}$ Fuß lang ist?

Auflösung.

Wenn das Seil $7\frac{1}{2}$ Fuß lang, so reicht der Ochs 2 Tage.

" " " 1 " " " " " " $\frac{2}{7\frac{1}{2}\times 7\frac{1}{2}}$ "

" " " $13\frac{3}{4}$ " " " " " " $\frac{2\text{ Tage}\times 13\frac{3}{4}\times 13\frac{3}{4}}{7\frac{1}{2}\times 7\frac{1}{2}}$

Denn der Kreis von 2 Fuß Radius hat 2×2mal soviel Fläche als der Kreis von 1 Fuß Radius, u. s. w. (§. 5, 4).

Ausr. $\frac{2\text{ T.}\times 55\times 55\times 2\times 2}{4\times 4\times 15\times 15}=\frac{11\times 11}{2\times 3\times 3}=6\frac{13}{18}$ Tage.

Antw. Wenn das Seil $13\frac{3}{4}$ Fuß lang ist, so hat der Ochs $6\frac{13}{18}$ d. i. fast 7 Tage zu fressen.

Aufgabe.

$3\frac{3}{8}$ Quart füllen einen Würfel von 6 Zoll Länge. Wieviel faßt ein Würfel von 4 Fuß 4 Zoll Länge?

Aufl. Der Würfel von 6 Zoll Länge faßt $3\frac{3}{8}$ Quart.

" " " 1 " " " $\frac{3\frac{3}{8}\text{ Quart}}{6\times 6\times 6}$

" " " 52 " " " $\frac{3\frac{3}{8}\text{ Qu.}\times 52\times 52\times 52}{6\times 6\times 6}$

Ausr. $\frac{27\times 52\times 52\times 52}{8\times 6\times 6\times 6}=13\times 13\times 13=2197.$

Antw. Ein Würfel von 4 Fuß 4 Zoll Länge faßt 2197 Quart.

2. Aufgaben, deren Lösung mehrfache Anwendung der Regel de tri erfordert, heißen Aufgaben der zusammengesetzten Regel de tri (Regula quinque, septem, u. s. w., Kettenregel).

Aufgabe.

Wenn 5 Ctr. für $2\frac{1}{2}$ Thlr. 14 Meilen weit geschafft werden, wieviel zahlt man für 21 Ctr. 25 Meilen weit?

Aufl. Für 5 Ctr. zahlt man $2\frac{1}{2}$ Thlr., und bei gleicher Entfernung für 1 Ctr. den 5ten Theil, für 21 Ctr. 21mal so viel, d. i.

$$\frac{2\frac{1}{2}\text{ Thlr.}\times 21}{5}$$

Diese Last 1 Meile weit zu schaffen, kostet den 14ten Theil, 25 Meilen weit 25mal soviel, also

$$\frac{2\frac{1}{2}\text{ Thlr.}\times 21\times 25}{5\times 14}$$

Ausr. $\frac{5 \times 21 \times 25}{2 \times 5 \times 14} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$.

Antw. 21 Ctr. 25 Meilen weit kosten $18\frac{3}{4}$ Thlr.

Aufgabe.

Zu wieviel Procent war das Capital 6300 Thlr. ausgeliehen, wenn es in 20 Jahren 5670 Thlr. Zinsen getragen hat?

Aufl. 6300 Thlr. trugen in 20 Jahren 5670 Thlr. Zinsen, in 1 Jahr den 20ten Theil soviel; 1 Thlr. trug den 6300ten Theil, 100 Thlr. 100mal soviel, d. i.

$$\frac{5670 \text{ Thlr.} \times 100}{20 \times 6300} \text{ Zinsen.}$$

Ausr. $\frac{567}{2 \times 63} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$.

Antw. Das Capital 6300 Thlr. stand zu $4\frac{1}{2}$ Proc. Zinsen aus.

Aufgabe.

Einen Canal 735′ lang, 10′ tief, 21′ breit zu graben, brauchen 140 Arbeiter, welche täglich $7\frac{1}{2}$ Stunde arbeiten, 546 Tage. Wie lang wird ein 15′ tiefer, 25′ breiter Canal, welchen in 324 Tagen, $8\frac{1}{3}$ Stunde täglich, 182 Arbeiter graben?

Aufl. Wenn der Canal 1′ statt 10′ tief ist, so wird er, unter sonst gleichen Umständen, 10mal so lang; wenn er 15′ statt 1′ tief ist, wird er den 15ten Theil so lang.

Wenn der Canal 1′ statt 21′ breit ist, so wird er 21mal so lang; wenn er 25′ statt 1′ breit ist, wird er den 25ten Theil so lang.

Wenn nicht 140, sondern 182 Arbeiter daran graben, so wird er den 140ten Theil 182mal so lang.

Wenn die Arbeiter nicht 546, sondern 324 Tage graben, so wird er den 546ten Theil 424mal so lang.

Wenn die Arbeiter täglich nicht $7\frac{1}{2}$, sondern $8\frac{1}{3}$ Stunde arbeiten, so wird er den $7\frac{1}{2}$ten Theil $8\frac{1}{3}$mal so lang. Also wird der Canal

$$\frac{735' \times 10 \times 21 \times 182 \times 324 \times 8\frac{1}{3}}{15 \times 25 \times 140 \times 546 \times 7\frac{1}{2}} \text{ lang.}$$

Ausr. $\frac{735 \times 10 \times 21 \times 182 \times 324 \times 25 \times 2}{15 \times 25 \times 140 \times 546 \times 3 \times 15} = 352\frac{4}{5}$.

Antw. Dieser Canal wird $352\frac{4}{5}$ Fuß lang.

Aufgabe.

Wieviel preuß. Fuß sind 139 par. Fuß, da 15′ par. = 16′ engl., 28′ engl. = 27′ östr., 139′ östr. = 140, preuß.?

Aufl. Da 1' par. = $\frac{16}{15}$' engl., so verwandelt man par. Fuß in engl. Fuß, indem man mit $\frac{16}{15}$ multiplicirt, u. s. w. Folglich

$$139' \text{ par.} = \frac{139' \times 16}{15} \text{ engl.} = \frac{139' \times 16 \times 27}{15 \times 28} \text{ östr.}$$

$$= \frac{139' \times 16 \times 27 \times 140}{15 \times 28 \times 139} \text{ preuß.}$$

Ausr. $\frac{139 \times 16 \times 27 \times 140}{15 \times 28 \times 139} = 16 \times 9 = 144.$

Antw. 139' par. = 144' preuß.

Aufgabe.

Wie theuer wird 1 leipziger Pfund Waare verkauft, von der 1 hamburger Pfund $6\frac{1}{4}$ Mark kostet, wenn die Versendung 5 Proc. Unkosten gemacht hat und 8 Proc. Gewinn genommen werden? (1 Mark = $\frac{2}{5}$ Thlr., 100 Pfd. hamb. = $103\frac{1}{2}$ Pfd. leipz.)

Aufl. 1 hamb. Pfd. kostet in Hamburg $\frac{5}{2}$ Thlr., in Leipzig bei 5 Proc. Unkosten $\frac{105}{100}$mal soviel; 1 leipz. Pfd. kostet $\frac{100}{103\frac{1}{2}}$mal soviel, und mit 8 Proc. Gewinn verkauft $\frac{108}{100}$mal soviel, also

$$\frac{5 \text{ Thlr.} \times 105 \times 100 \times 108}{2 \times 100 \times 103\frac{1}{2} \times 100}.$$

Ausr. $\frac{5 \times 105 \times 108}{207 \times 100} = \frac{7 \times 9}{23}$ Thlr. = 2 Thlr. 22 Ngr. $1\frac{17}{23}$ Pf.

Antw. Ein leipz. Pfund dieser Waare wird für 2 Thlr. 22 Ngr. $1\frac{17}{23}$ Pf. verkauft.

Aufgabe.

Es soll in Leipzig ein Wechsel von 1000 Ducaten auf Amsterdam gekauft werden. Der Amsterdamer Cours in Leipzig ist $143\frac{1}{2}$ (Thaler für 250 holl. Gulden des Wechsels). Der Ducaten gilt in Amsterdam 5 Gulden 68 Centimes (1 Gulden = 100 Cent.). Der Wechsler erhält $\frac{1}{3}$ Proc. nebst 1 Promille ($\frac{1}{1000}$) Mäklergebühr (Courtage). Wieviel kostet der Wechsel?

Aufl. 1000 Duc. = $1000 \times 5\frac{68}{100}$ Gulden

$$= \frac{1000 \times 5\frac{68}{100} \times 143\frac{1}{2}}{250} \text{ Thlr.}$$

mit $\frac{13}{30}$ Proc. Unkosten

$$= \frac{1000 \times 5\frac{68}{100} \times 143\frac{1}{2} \times 100\frac{13}{30}}{250 \times 100} \text{ Thlr.}$$

Ausr. $\dfrac{1000 \times 568 \times 287 \times 3013}{250 \times 100 \times 100 \times 2 \times 30} = 3274\frac{134416}{300000}$.

Antw. Der Wechsel kostet 3274 Thlr. 13 Ngr. 5 Pf.

§. 13. Theilung nach gegebenen Verhältnissen.

1. Wenn die gleichartigen Größen A, B, C, . . eine gewisse Größe (Einheit) der Reihe nach 2, 3, 5, . . mal enthalten, so verhalten sie sich zu einander der Reihe nach wie die Zahlen 2, 3, 5, . . d. h. das Verhältniß A : B ist 2 : 3, das Verhältniß A : C ist 2 : 5, das Verhältniß C : B ist 5 : 3, u. s. f. (§. 3, 2). Man vereinigt diese Angaben in dem Ausdruck

$$A : B : C = 2 : 3 : 5,$$

welcher eine Proportion*) genannt wird. Aus der Proportion erkennt man nicht nur, daß

$$A = \tfrac{2}{3} B, \quad A = \tfrac{2}{5} C,$$
$$B = \tfrac{3}{2} A, \quad B = \tfrac{3}{5} C, \text{ u. s. w.}$$

sondern auch, daß

$$\tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{3} B = \tfrac{1}{5} C,$$

und nach Multiplication mit 2 . 3 . 5,

$$15 A = 10 B = 6 C.$$

Denn nach der Voraussetzung betragen $\frac{1}{2}$ A, $\frac{1}{3}$ B, $\frac{1}{5}$ C je 1 Einheit.

2. Die Zahlen einer Proportion können sämmtlich mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt werden, weil dadurch ihre Verhältnisse zu einander nicht verändert werden (§. 8, 3).

Wenn z. B.

$$A : B : C = \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{9},$$

so findet man

$$A : B : C = 24 : 27 : 20,$$

indem man $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ mit dem Generalnenner 36 multiplicirt.

Wenn ferner

$$D : E : F = 21 : 28 : 35,$$

so findet man

$$D : E : F = 3 : 4 : 5,$$

indem man 21, 28, 35 durch ihren gemeinschaftlichen Divisor 7 dividirt.

3. Wenn A und B die Theile eines Ganzen sind und zu einander wie 2 und 3 sich verhalten, so hat das Ganze 2 + 3 d. i. 5 Einheiten, deren 2 auf A, 3 auf B kommen. Aus der Proportion der Theile

---

*) Vergl. 3tes Buch §. 1.

$$A : B = 2 : 3$$

erkennt man also, daß $A = \frac{2}{5}$ des Ganzen, $B = \frac{3}{5}$ des Ganzen ist.

Wenn A, B, C die Theile eines Ganzen sind und zu einander wie 2, 3, 5 sich verhalten, so hat das Ganze $2 + 3 + 5$ d. i. 10 Einheiten, deren 2 auf A, 3 auf B, 5 auf C kommen. Aus der Proportion der Theile

$$A : B : C = 2 : 3 : 5$$

folgt also, daß $A = \frac{2}{10}$ des Ganzen, $B = \frac{3}{10}$ des Ganzen, $C = \frac{5}{10}$ des Ganzen ist.

4. Gesellschaftsrechnung heißt die Theilung einer Größe nach gegebenen Verhältnissen d. i. in ungleiche Theile, deren Verhältnisse zu einander gegeben sind. Soll z. B. die Größe M nach den Verhältnissen 3 : 4 : 5 in die Theile A, B, C getheilt werden, so schließt man aus der Proportion der Theile

$$A : B : C = 3 : 4 : 5,$$

daß A eine gewisse Größe (Einheit) 3mal, B dieselbe Größe 4mal, C dieselbe 5mal, also M dieselbe $3 + 4 + 5$ d. i. 12mal enthält. Daher theilt man M in 12 gleiche Theile und nimmt deren 3 für A, 4 für B, 5 für C.

Bei den Aufgaben der Gesellschaftsrechnung kommt in Betracht 1) die zu theilende Größe, 2) die Proportion der Theile, 3) die Summe der Zahlen der Proportion, 4) Division der zu theilenden Größe durch die Summe, 5) Multiplication des Quotienten mit den einzelnen Zahlen der Proportion.

Aufgabe.

9728 Thlr. sollen unter drei Brüder nach Verhältniß ihres Alters (36, 24, 16 Jahr) getheilt werden. Wieviel erhält jeder?

Aufl. Die Theile verhalten sich wie 36 : 24 : 16 d. i. 9 : 6 : 4, folglich betragen sie

$9728 \times \frac{9}{19}$ Thlr., $9728 \times \frac{6}{19}$ Thlr., $9728 \times \frac{4}{19}$ Thlr.

Ausr. $9728 : 19 = 512$, $512 \times 9 = 4608$
22 $512 \times 6 = 3072$
38 $512 \times 4 = 2048$
9728.

Antw. Die Brüder erhalten 4608, 3072, 2048 Thlr.

Aufgabe.

Vier Personen kaufen ein Loos, wozu A 8 Thlr. 10 Sgr., B 12 Thlr. 25 Sgr., C 6 Thlr. 20 Sgr., D 13 Thlr. giebt. Das Loos

gewinnt 10 000 Thlr., wovon $12\frac{1}{2}$ Proc. die Hauptcasse und $3\frac{1}{3}$ Proc. der Einnehmer abzieht. Wieviel bekommt jeder?

Aufl. Die Lotteriecasse zahlt für das Loos $\frac{10\,000 \text{ Thlr.} \times 87\frac{1}{2}}{100}$, der Einnehmer zahlt dafür $\frac{10\,000 \text{ Thlr.} \times 87\frac{1}{2} \times 96\frac{2}{3}}{100 \times 100}$ aus. Diese Geldsumme haben die vier Personen nach Verhältniß der Beiträge zu theilen, welche sich verhalten wie

$$250 : 385 : 200 : 390 = 50 : 77 : 40 : 78.$$

Die vier Personen erhalten $\frac{50}{245}$, $\frac{77}{245}$, $\frac{40}{245}$, $\frac{78}{245}$ der ausgezahlten Summe.

Ausr. $87\frac{1}{2} \times 96\frac{2}{3} = 8458\frac{1}{3}$, $8458\frac{1}{3} : 245 = 34\frac{11}{21}$.

A erhält	$34\frac{11}{21} \times 50 = 1726\frac{4}{21}$	Thlr.
B „	$34\frac{11}{21} \times 77 = 2658\frac{1}{3}$	„
C „	$34\frac{11}{21} \times 40 = 1380\frac{20}{21}$	„
D „	$34\frac{11}{21} \times 78 = 2692\frac{6}{7}$	„
	$8458\frac{1}{3}$	

Aufgabe.

Im Sprengpulver verhalten sich die Massen von Salpeter und Kohle wie 16 zu 5, von Salpeter und Schwefel wie 10 zu 3. Wieviel von diesen Stoffen ist zu 5934 Pfund Sprengpulver nöthig?

Aufl. Auf 1 Pfund Salpeter kommt $\frac{5}{16}$ Pfd. Kohle und $\frac{3}{10}$ Pfd. Schwefel, mithin ist 5934 Pfd. nach den Verhältnissen $1 : \frac{5}{16} : \frac{3}{10} = 80 : 25 : 24$ zu theilen. Das Pulver enthält

$5934 \times \frac{80}{129}$ Pfd. Salpeter,
$5934 \times \frac{25}{129}$ Pfd. Kohle,
$5934 \times \frac{24}{129}$ Pfd. Schwefel.

Ausr. $5934 : 129 = 46$, $46 \times 80 = 3680$ Pfd. Salpeter.
$46 \times 25 = 1150$ „ Kohle.
$46 \times 24 = 1104$ „ Schwefel.
5934 Pfd. Pulver.

Aufgabe.

Zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung gab A 200 Thlr. auf 4 Monate, B 160 Thlr. auf 6 Monate, C 120 Thlr. auf 8 Monate. Sie gewannen 136 Thlr. Wieviel bekommt jeder davon?

Aufl. Gilt der Anspruch Eines, der 1 Thlr. auf 1 Monat gegeben hätte, als Einheit, so kommen vom Gewinn dem A 200×4, dem B 160×6, dem C 120×8 Einheiten zu, und ihre Ansprüche verhalten sich wie

$$200 \times 4 : 160 \times 6 : 120 \times 8 = 5 : 6 : 6.$$

Daher bekommt A $136 \times \frac{5}{17}$ Thlr., B und C $136 \times \frac{6}{17}$ Thlr. Nun ist $136 : 17 = 8$, mithin erhält

A	$8 \times 5 = 40$	Thlr.
B	$8 \times 6 = 48$	„
C	$8 \times 6 = 48$	„
	136	Thlr.

5. Die Mischungsregel betrifft die Ermittelung des Verhältnisses, nach welchem zwei Sorten von gegebenem Werthe gemischt werden müssen, damit die Mischung einen gegebenen Werth erhält. Z. B. Aus zwei Sorten Wein, A und B, von denen das Quart 36 und 20 Sgr. kostet, soll eine Mittelsorte M gemischt werden, von der das Quart 30 Sgr. kostet. Man hat in der Mischung

an 1 Quart A 36 — 30 Sgr. d. i. 6 Sgr. Verlust,
an 1 Quart B 30 — 20 Sgr. d. i. 10 Sgr. Gewinn,

folglich

an 10 Quart A 6 . 10 Sgr. Verlust,
an 6 Quart B 10 . 6 Sgr. Gewinn.

Der Verlust an A wird durch den Gewinn an B aufgehoben, wenn man 10 Einheiten A mit 6 Einheiten B mischt, also

$$A : B = 10 : 6 = 5 : 3$$

d. h. $A = \frac{5}{3}\,B = \frac{5}{8}$ der Mischung, $B = \frac{3}{5}\,A = \frac{3}{8}$ der Mischung.

Die Mischungsregel lautet demnach: „Bilde die Differenzen der Werthe von der bessern Sorte und der Mischung, von der Mischung und der schlechtern Sorte; mische die bessere Sorte mit der schlechtern nach dem Verhältniß der zweiten Differenz zur ersten Differenz."

Soll aus einer Sorte (A) zu 36 Sgr. durch Zusatz von Wasser (B) eine Sorte zu 30 Sgr. gemischt werden, so ist die erste Differenz 36—30 Sgr., die zweite Differenz 30—0 Sgr., folglich die Proportion der Bestandtheile

$$A : B = 30 : 6 = 5 : 1,$$

d. h. $B = \frac{1}{5}\,A = \frac{1}{6}$ der Mischung.

Aufgabe.

Aus 14löthigem Silber (A) und 8löthigem Silber (B) soll 12löthiges Silber gemischt werden. Das Silber heißt 14löthig, wenn eine Mark desselben 14 Loth fein Silber (und 2 Loth Kupfer) enthält.

Aufl. Die erste Differenz beträgt 14 — 12 Loth f., die zweite Differenz 12—8 Loth f., folglich

$$A : B = 4 : 2 = 2 : 1$$
d. h. $A = 2\,B = \frac{2}{3}$ der Mischung,
$B = \frac{1}{2}\,A = \frac{1}{3}$ der Mischung.

Soll aus 14löthigem Silber (A) durch Zusatz von Kupfer (B) 12löthiges Silber bereitet werden, so ist die erste Differenz 14—12 Loth f., die zweite Differenz 12—0 Loth f., also
$$A : B = 12 : 2 = 6 : 1$$
d. h. $B = \frac{1}{6}\,A = \frac{1}{7}$ der Mischung.

§. 14. Die Decimalbrüche.

In allen Sprachen sind die Zahlwörter nach dem Decimalsystem gebildet, so daß zehn Einheiten in einen Zehner, zehn Zehner in ein Hundert, zehn Hunderte in ein Tausend zusammengefaßt werden; die neueren Sprachen vereinigen dann tausend Tausende in eine Million, million Millionen in eine Billion u. s. w. Bei der Bezeichnung der Zahlen gebraucht man allgemein nach indischer Erfindung, die zuerst durch die Araber weiter verbreitet wurde, dieselben zehn Ziffern, welche für sich Einer bedeuten, auch zur Angabe höherer Einheiten und macht die höhern Einheiten durch ihre Stellung vor die Einer kenntlich, so daß die Zehner die 1te, die Hunderte die 2te, die Tausende die 3te, . . , die Millionen die 6te, . . , die Billionen die 12te, . . Stelle vor den Einern einnehmen. Ebenso werden zur Bezeichnung von niedern Einheiten (Brüchen) die Stellen nach den Einern angewendet*).

Die Einheiten einer bestimmten Stelle sind im Decimalsystem 10mal so groß als die Einheiten der (rechts) folgenden, z. B. auf die Tausende folgen Hunderte, auf die Hunderte Zehner, auf die Zehner Einer. Auf die Einer folgen daher in der 1ten Stelle Zehntel, in der 2ten Stelle Hundertel, in der 3ten Stelle Tausendtel, in der 6ten Milliontel, in der 12ten Billiontel, u. s. f. Um die Einer als solche anzuzeigen, macht man nach denselben ein Komma (Punkt, das Einerzeichen). Daher bedeutet 426,357..

*) Die indischen (arabischen) Ziffern sind im 13. Jahrhundert n. Chr. in Europa bekannter worden. Die Rechnung mit Decimalzahlen nach der neuen Bezeichnung hieß Algorithmus, welches Wort später für jede Art von Rechnungs-Operationen gebraucht wurde. Regiomontan vertauschte um 1464 die bei den griechischen Mathematikern und deren Nachfolgern gebräuchlichen Sexagesimalbrüche mit den bequemeren Decimalbrüchen. In allgemeineren Gebrauch kamen die Decimalbrüche seit der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts (Recorde 1557, Stevin 1585). Die Abkürzung der Decimalbruchrechnung hat Keppler 1623 durch Prätorius (von Altdorf) gelernt. Vergl. Grunert Archiv 24 p. 296.

4 Hunderte + 2 Zehner + 6 Einer + 3 Zehntel.
+ 5 Hundertel + 7 Tausendtel + . .

Gleichwie nun 4 Hunderte = 40 Zehner = 400 Einer, 2 Zehner = 20 Einer, also die ganze Zahl = 426 Einer, so sind 3 Zehntel = 30 Hundertel = 300 Tausendtel, 5 Hundertel = 50 Tausendtel, also die gebrochene Zahl = 357 Tausendtel. Man kann aber auch die 426 Einer zu 426000 Tausendtel machen und erhält eingerichtet 426 357 Tausendtel. Daher

$$426{,}357 = 426\,\tfrac{357}{1000} = \tfrac{426357}{1000}.$$

1. Brüche, deren Nenner Einheiten des Decimalsystems, 10, 100, 1000, . . . (Potenzen der 10) sind, heißen Decimalbrüche. Sie werden ohne Nenner geschrieben, indem man die Zehntel von den Einern durch ein Komma trennt. Brüche mit andern Nennern heißen gemeine Brüche.

2. Um eine gemischte Decimalzahl zu lesen, liest man entweder (zerlegt) nächst der ganzen Zahl einen Bruch, dessen Zähler die nach dem Komma stehende Zahl und dessen Nenner der Nenner der letzten Stelle ist, oder (eingerichtet) einen Bruch, dessen Zähler die Decimalzahl ohne das Komma, und dessen Nenner der Nenner der letzten Stelle ist.

Zerlegen und Einrichten geschieht bei Decimalbrüchen ohne die Rechnung, welche bei gemeinen Brüchen erfordert wird (§. 8, 1).

3. Da die Bruchstellen nach der Einerstelle beurtheilt werden, so kann die Letztere nie fehlen. Ist der Decimalbruch echt, so muß er mit 0 Einern beginnen; z. B.

7 Zehntel = 0,7
28 Hundertel = 2 Zehntel + 8 Hundertel = 0,28.
9 Hundertel = 0 Zehntel + 9 Hundertel = 0,09.
307 Tausendtel = 3 Zehntel + 0 Hundertel + 7 Tausendtel = 0,307.
1 Tausendtel = 0,001.
1 Milliontel = 0,000 001.
1847 Hunderttausendtel = 0,018 47 u. s. f.

Um einen Decimalbruch zu schreiben, schreibt man seinen Zähler (und vor denselben, wenn nöthig noch Nullen, bis soviel Ziffern dastehen, als der Nenner hat) und setzt das Komma so, daß die letzte Stelle den gegebenen Nenner hat.

$$\tfrac{1835}{10} = 183{,}5 \qquad \tfrac{1835}{100} = 18{,}35 \text{ u. s. f.}$$

4. Da 7 Zehntel = 70 Hundertel = 700 Tausendtel u. s. f.

und 3 Einer = 30 Zehntel = 300 Hundertel u. s. f., so kann man an einen Decimalbruch oder an eine ganze Zahl, nachdem man das Komma nach der Einerstelle gemacht hat, Nullen beliebig anhängen oder vom Ende weglassen.

$$0{,}7 = 0{,}70 = 0{,}700\ldots$$
$$3 = 3{,}0 = 3{,}00\ldots$$
$$1800 : 100 = 18{,}00 = 18.$$
$$1800 : 1000 = 1{,}800 = 1{,}8.$$
$$1800 : 1000000 = 0{,}001800 = 0{,}0018.$$

Die Umformung (§. 8, 3) von Decimalbrüchen erfordert keine Rechnung, sobald man nicht zu gemeinen Brüchen übergeht.

Nach dem Muster des Decimalsystems mit der Grundzahl 10 kann man auch auf andere Grundzahlen Zahlsysteme bauen, z. B. ein Duodecimalsystem auf die Grundzahl 12. Dazu braucht man noch 2 Ziffern für zehn und elf, z. B. z, e, und bildet aus 12 Einern 1 Zwölfer (bez. 10), aus 12 Zwölfern 1 Hundertvierundvierziger (bez. 100), aus 12 Hundertvierundvierzigern 1 Tausendsiebenhundertachtundzwanziger (bez. 1000) u. s. w. Auf die Einer folgen dann rechts Duodecimalbrüche, Zwölftel in der ersten, Hundertundvierundvierzigstel in der zweiten, Tausendsiebenhundertachtundzwanzigstel in der dritten Stelle, u. s. w. Daher bedeutet die Duodecimahlzahl 7z08,5e4 folgende Decimalzahl:

7×1728	12096
$+ 10 \times 144$	1440
$+ 0 \times 12$	0
$+ 8 \times 1$	8
$+ 5 \times \frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
$+ 11 \times \frac{1}{144}$	$\frac{11}{144}$
$+ 4 \times \frac{1}{1728}$	$\frac{1}{432}$
	$13544\frac{157}{216}$

Praktische Bedeutung können andere Zahlsysteme, als das Decimalsystem, nicht erlangen, weil die Zahlwörter der Cultursprachen auf das Decimalsystem gegründet sind, und in einer gegebenen Sprache nicht willkürlich neue Wörter gebildet werden können.

§. 15. Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

1. Wie man Einer zu den Einern, Zehner zu den Zehnern u. s. f. bei ganzen Zahlen addirt, so addirt man Zehntel zu den Zehnteln, Hundertel zu den Hunderteln u. s. f., indem man von der niedrigsten Stelle anfängt; z. B.

$$\begin{array}{r} 27{,}568 \\ +\ 5{,}874 \\ \hline 33{,}442 \end{array}$$

8 + 4 Tausendtel = 12 Tausendtel = 1 Hundertel + 2 Tausendtel,
1 + 6 + 7 Hundertel = 14 Hundertel = 1 Zehntel + 4 Hundertel,
1 + 5 + 8 Zehntel = 14 Zehntel = 1 Einer + 4 Zehntel,
1 + 7 + 5 Einer = 13 Einer = 1 Zehner + 3 Einer,
1 + 2 Zehner = 3 Zehner.

$$\begin{array}{r}35{,}894\\ +\;0{,}1307\\ \hline 36{,}0247\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}27{,}568\\ +\;1{,}232\\ \hline 28{,}8\end{array}$$

Die Zehntausendtel des erstern Beispiels bleiben ungeändert; die Nullen am Ende des letztern können wegbleiben.

2. Eben so subtrahirt man Zehntel von Zehnteln, Hundertel von Hunderteln u. s. w., indem man, wenn nöthig, 1 Einer = 10 Zehntel = 100 Hundertel . . , oder 1 Zehntel = 10 Hundertel . . zu Hülfe nimmt (borgt); z. B.

$$\begin{array}{r}35{,}0305\\ -\;6{,}8941\\ \hline 28{,}1364\end{array}$$

5 — 1 Zehntausendtel = 4 Zehntausendtel,
10 — 4 Tausendtel = 6 Tausendtel,
12 — 9 Hundertel = 3 Hundertel,
9 — 8 Zehntel = 1 Zehntel,
14 — 6 Einer = 8 Einer
2 Zehner.

$$\begin{array}{r}1{,}534\\ -\;0{,}734\\ \hline 0{,}8\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}1\\ -\;0{,}794\\ \hline 0{,}206\end{array}$$

Die Nullen am Ende können wegbleiben. Statt 1 hat man 1,000 zu nehmen.

Bei diesen Rechnungen zeigen die Decimalbrüche besondern Vortheil vor den gemeinen Brüchen.

§. 16. Multiplication der Decimalbrüche.

1. Um einen Decimalbruch mit 10, 100, 1000, . . zu multipliciren, rückt man das Komma 1, 2, 3, . . Stellen weiter rechts, z. B..

$7{,}23 \times 10 = 72{,}3 \qquad 11{,}5 \times 10 = 115 \qquad 0{,}007 \times 10 = 0{,}07$

$1{,}0073 \times 100 = 100{,}73 \qquad 0{,}0067 \times 100 = 0{,}67$

$0{,}723 \times 1000 = 723 \qquad 0{,}723 \times 10\,000 = 7230.$

Denn indem man mit 10 multiplicirt, werden aus Zehnern Hunderte, aus Einern Zehner, aus Zehnteln Einer, aus Hunderteln Zehntel, u. s. w. und die Einheiten jeder Stelle gehen in Einheiten der nächst höhern

Stelle über. Indem man mit 100 multiplicirt, gehen die Einheiten jeder Stelle in Einheiten der 2ten höhern Stelle über u. s. f.

Umgekehrt: um einen Decimalbruch durch 10, 100, 1000, . . zu dividiren, rückt man das Komma 1, 2, 3, . . Stellen weiter links.

$$17{,}23 : 10 = 1{,}723 \qquad 7{,}23 : 10 = 0{,}723$$
$$17{,}23 : 100 = 0{,}1723 \qquad 17{,}23 : 1000 = 0{,}01723$$
$$0{,}03 : 10000 = 0{,}000003.$$

Diese Regeln folgen auch aus den allgemeinen Regeln §. 10.

2. Um einen Decimalbruch mit einem Decimalbruch zu multipliciren, multiplicirt man denselben mit den einzelnen Stellen des Multiplicator, von der höchsten bis zur letzten, macht in der ersten Zeile des Products das Komma, rückt jede folgende Zeile des Products eine Stelle weiter rechts hinaus, und addirt die einzelnen Producte.

Multiplicirt man zuerst mit Einern, so behält das Komma den Platz, den es im Multiplicandus hatte, z. B.

$$\begin{array}{r} 7{,}543 \,.\, 6 \\ \hline 45{,}258 \end{array} \quad \text{weil } 7{,}543 \,.\, 6 = \frac{7543 \,.\, 6}{1000}$$

Multiplicirt man zuerst mit Zehnern, Hunderten, . ., so setzt man das Komma 1, 2, . . Stellen weiter rechts, z. B.

$$\begin{array}{r} 7{,}543 \,.\, 40 \\ \hline 301{,}72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}543 \,.\, 800 \\ \hline 6034{,}4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}5763 \,.\, 2000 \\ \hline 1152{,}6 \end{array}$$

weil $7{,}543 \,.\, 40 = 75{,}43 \,.\, 4$, u. s. w.

Multiplicirt man zuerst mit Zehnteln, Hunderteln, . . , so setzt man das Komma 1, 2, . . Stellen weiter links, z. B.

$$\begin{array}{r} 7{,}543 \,.\, 0{,}2 \\ \hline 1{,}5086 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}543 \,.\, 0{,}05 \\ \hline 0{,}37715 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}543 \,.\, 0{,}007 \\ \hline 0{,}052801 \end{array}$$

weil $7{,}543 \,.\, 0{,}2 = 0{,}7543 \,.\, 2$, u. s. w.

Multiplicirt man ferner mit den auf die höchste folgenden Stellen des Multiplicator, so hat man jede neue Zeile des Products eine Stelle weiter rechts auszurücken. Z. B.

$$\begin{array}{l} 7{,}543 \,.\, 46{,}25 \\ \hline 301{,}72 \\ 45258 \\ 15086 \\ 37715 \\ \hline 348{,}86375 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 46{,}25 \,.\, 7{,}543 \\ \hline 323{,}75 \\ 23125 \\ 18500 \\ 13875 \\ \hline 348{,}86375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62500 \,.\, 0{,}00128 = 625 \,.\, 0{,}128 \\ \hline 62{,}5 \\ 12\,50 \\ 5\,000 \\ \hline 80 \end{array}$$

Man nimmt 625 . 100 statt 62500, und multiplicirt den Bruch mit 100. Die Nullen am Ende bleiben weg.

$$15{,}743 \,.\, 322{,}69 = 1573{,}4 \,.\, 3{,}2269.$$

Man kann den einen Factor durch 100 dividiren, wenn man den andern mit 100 multiplicirt.

Man kann nach der allgemeinen Regel §. 12, 2 die Zähler (ganze Zahlen) multipliciren und ihr Product durch das Product der Nenner dividiren, d. h. soviel Stellen durch das Komma vom Product der Zähler rechts abschneiden, als Bruchstellen in beiden Factoren zusammengenommen vorhanden sind. Hat z. B. der eine Factor 3, der andere 4 Bruchstellen, so hat das ungekürzte Product 3 + 4 d. i. 7 Bruchstellen; denn der Nenner 1000 mit dem Nenner 10000 multiplicirt giebt den Nenner 10000000, welcher der 7ten Bruchstelle zukommt. Dieses Verfahren ist aber für das practische Rechnen nicht zu empfehlen, weil es bei der abgekürzten Multiplication (§. 18) nicht ohne Weiteres anwendbar ist.

§. 17. Division der Decimalbrüche.

1. Ist der Divisor eine ganze Zahl, so findet man

die ganze Zahl des Quotienten, indem man die ganze Zahl des Dividendus dividirt;

die Zehntel des Quotienten, indem man die Zehntel des Dividendus mit Einschluß des Einerrestes dividirt;

die Hundertel des Quotienten, indem man die Hundertel des Dividendus mit Einschluß des Zehntelrestes dividirt, u. s. w. Fehlen Bruchstellen im Dividendus zur Fortsetzung der Division, so hängt man Nullen an denselben (§. 14, 4). Z. B.

```
326,74 : 28 = 11,6692                 0,053 : 9 = 0,005 88
28                                     0
 46          11,6692 . 28              5
 28          233,384                   53
 187          93 3536                   80
 168              24                    80
  194        326,74                      8 . . .
  168                                5 : 7 = 0,714 2857
   260                               50
   252                                10
    80                                30
    56                                 20
    24 . . .                           60
                                        40
                                         50
                                          1 . . .
```

Wie weit man die Division, wenn sie nicht aufgeht, fortzusetzen hat, hängt von der Natur der Aufgabe ab. Man benutzt den Rest, um den berechneten Quotienten so genau als möglich, den Fehler desselben so klein als möglich zu machen (Vergl. §. 3, 4). Genügt es z. B., den Quotienten von 326,74 : 28 bis auf Zehntausendtel zu berechnen, und darf man die Hunderttausendtel desselben als unmerklich klein vernachlässigen, so ist als Quotient 11,6693 und nicht 11,6692 anzugeben, weil bei der letzten Division 80 : 28 näher 3 als 2 ist. Der Fehler des Quotienten 11,6693 beträgt weniger als $\frac{1}{2}$ Zehntausendtel und ist so klein als möglich, wenn man auf die Angabe kleinerer Bruchtheile verzichtet. Denn indem man 80 : 28 = 3 nimmt, vernachlässigt man $\frac{4}{28}$ (d. i. weniger als $\frac{1}{2}$) Zehntausendtel, während man, indem man 80 : 28 = 2 nimmt, $\frac{24}{28}$ (d. i. mehr als $\frac{1}{2}$) Zehntausendtel vernachlässigen würde.

Eben so ist 0,053 : 9 genauer 0,005 89 als 0,005 88. Dagegen ist 5 : 7 genauer 0,714 2857 als 0,714 2858. Man vermehrt die letzte Stelle des unvollständigen Quotienten um 1, wenn der Rest mehr als die Hälfte des Divisor ist. Der Fehler des Quotienten wird dann nicht mehr als $\frac{1}{2}$ Einheit seiner letzten Stelle betragen.

2. Um durch einen Decimalbruch zu dividiren, multiplicirt man mit dem Nenner (§. 16, 1) und dividirt das Product durch den Zähler, wie bei einem gemeinen Bruche (§. 11, 3). Z. B.

$$17{,}4832 : 3{,}125 = 17{,}4832 \,.\, 1000 : 3125$$
$$= 17483{,}2 : 3125 = 5{,}59..$$

```
15625
 18582
 15625
  29570
  28125
   1445..
```

$$0{,}043\,81 : 0{,}35 = 4{,}381 : 35$$
$$0{,}09 : 0{,}3845 = 900 : 3845.$$

Statt 0,09 kann man 0,0900 setzen. Nun sind 3845 Zehntausendtel in 900 Zehntausendteln sovielmal enthalten als 3845 in 900. Also kann man das Komma weglassen, nachdem Dividendus und Divisor gleichnamig gemacht sind. Vergl. §. 11, 3.

3. Sind Dividendus und Divisor (abgesehen vom Komma) relative Primzahlen (§. 7, 3), und ist der Divisor 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . (eine Potenz der 2) oder 5, 25, 125, 625, 3125, . . (eine Potenz der 5) oder nur aus diesen Zahlen zusammengesetzt, wie 20, 40, 80, 160, 320, 640, . . , 50, 200, 400, 800, . . , 250, 500, 2000, 4000, . . , 1250, 2500, 5000, 20 000, . . u. s. w., so geht die Division auf und der Quotient ist ein vollständiger (endlicher) Decimalbruch. Die Division geht auf, wenn z. B.

Divisor 20 Rest 13, weil $\frac{13}{20} = \frac{13 \,.\, 5}{20 \,.\, 5} = 0{,}65$

„ 125 „ 72 „ $\frac{72}{125} = \frac{72 \,.\, 8}{125 \,.\, 8} = 0{,}576$

„ 36 „ 27 „ $\frac{27}{36} = \frac{3 \,.\, 25}{4 \,.\, 25} = 0{,}75$

„ 56 „ 35 „ $\frac{35}{56} = \frac{5 \,.\, 125}{8 \,.\, 125} = 0{,}625.$

In der That findet man

```
27,53 : 20 = 1,3765.          607,2 : 125 = 4,8576.
 7 5                          607
 1 53                         500
   130                        1072
    100                       1000
     0                         720
                               625
                                950
                                875
                                 750
                                 750
                                   0
```

18387 : 36 = 510,75.
180
38
36
270
252
180
180
0

35 : 56 = 0,625
350
336
140
112
280
280
0

4. Wenn der Divisor prim zum Dividendus (Rest) und durch eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl theilbar ist, so geht die Division nicht auf, und der Quotient ist ein periodischer unendlicher Decimalbruch, den man so abbricht, daß der Fehler die erforderliche Kleinheit hat.

Ist z. B. der Divisor 7 und der Rest 3, so kann der zur letzten Stelle des Quotienten gehörige Bruch $\frac{3}{7}$ nicht genau in einen Decimalbruch verwandelt werden, weil 7 nicht in 10, 100, 1000, . . aufgeht (§. 8, 3). Ist der Divisor 12 und der Rest 5, so kann $\frac{5}{12}$ zwar auf $\frac{125}{300}$ gebracht, aber $\frac{125}{300}$ nicht genau in einen Decimalbruch verwandelt werden, weil 300 in 1000, 10000 , . . ebensowenig aufgeht als 3 in 10. Daher können die Divisionen 3,00.. : 7, 5,00.. : 12 u. dgl. nicht aufgehen.

Bei dem Divisor 7 können nur die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 erscheinen. Hat man daher bis zur 6ten Division verschiedene Reste erhalten, so bleibt bei der 6ten Division ein Rest, welcher schon einmal mit einer Null versehen und dividirt worden ist. Man findet also denselben Quotienten und Rest wie früher, denen die übrigen Quotienten und Reste in unaufhörlicher Wiederkehr folgen. Die sich wiederholende Reihe der einzelnen Quotienten, deren Anzahl wenigstens um 1 kleiner ist als der Divisor, heißt die Periode des unendlichen Decimalbruchs. Z. B.

3 : 7 = 0,428 571 428 571 428... bezeichnet 0,[428 571]
30
20
60
40
50
10
3...

31 : 33 = 0,[93]
310
297
130
99
31...

19 : 111 = 0,[171]
190
111
790
777
130
111
19

7 : 9 = 0,[7]
70
7...

1 : 15 = 0,0[6]
10
100
10...

1 : 369 = 0,[002 71]
10
100
1000
738
2620
2583
370
369
1...

119 : 220 = 0,54[09]
1190
1100
900
880
2000
1980
20...

Die Periode beginnt mit der Stelle, zu deren Berechnung zuerst eine Null dem Rest angehängt wurde, außer wenn der Divisor durch 2 oder 5 theilbar ist.

5. Jeder gemeine Bruch kann entweder in einen endlichen oder in einen periodischen unendlichen Decimalbruch verwandelt werden. Denn ein Bruch ist der Quotient des Zählers durch den Nenner, z. B. $\frac{7}{12} = 7 : 12$, u. s. w.

Umgekehrt: jeder periodische unendliche Decimalbruch ist einem bestimmbaren gemeinen Bruche gleich. Man findet nämlich

$$\tfrac{1}{9} = 0,[1] \quad \tfrac{1}{99} = 0,[01] \quad \tfrac{1}{999} = 0,[001]$$
$$\tfrac{1}{9999} = 0,[0001] \quad \tfrac{1}{99999} = 0,[000\,01] \text{ u. s. f.}$$

folglich ist

$$0,[6] = 0,[1] \,.\, 6 = \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3}.$$
$$0,[36] = 0,[01] \,.\, 36 = \tfrac{36}{99} = \tfrac{4}{11}.$$
$$0,[270] = 0,[001] \,.\, 270 = \tfrac{270}{999} = \tfrac{10}{37}.$$
$$0,0[4] = 0,[4] : 10 = \tfrac{4}{9} : 10 = \tfrac{2}{45}.$$
$$0,8[3] = 8,[3] : 10 = 8\tfrac{1}{3} : 10 = \tfrac{5}{6}.$$
$$0,29[74] = 29,[74] : 100 = 29\tfrac{74}{99} : 100 = \tfrac{589}{1980}.$$

§. 18. Rechnung mit unvollständigen Decimalzahlen.

Eine Messung kann nicht vollkommen genau, sondern nur mit einer durch die Beschaffenheit der Meßinstrumente und der menschlichen Sinne begrenzten Genauigkeit ausgeführt werden. Die durch Messung gefundenen Zahlen sind daher nur bis zu einer bestimmten Grenze abwärts verbürgt, und müssen als mehr oder weniger unvollständig (fehlerhaft) betrachtet werden. Auch sind eine große Klasse durch Rechnung bestimm-

ter Zahlen ihrer Natur nach Summen von unendlich vielen Gliedern, z. B. Wurzeln, Logarithmen, Sinus, die Ludolfsche Zahl, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen u. s. w. und können folglich nur unvollständig angegeben werden, wenn auch so, daß in jedem gegebenen Falle der Fehler unbeträchtlich ist. Es ist nothwendig zu wissen, wieweit die durch Rechnung mit unvollständigen Zahlen gefundenen Zahlen verbürgt sind.

Bei jeder unvollständigen Zahl wird angenommen, daß der Fehler weniger beträgt, als ½ Einheit der letzten angegebenen Stelle. Unter Voraussetzung der Unvollständigkeit bedeutet demnach

35	eine Zahl zwischen	34,5	und 35,5
1,427	„ „ „	1,4265	„ 1,4275
0,4700	„ „ „	0,469 95	„ 0,470 05
20734 Tausend	„ „ „	20 733 500	„ 20 734 500
$329\frac{2}{7}$	„ „ „	$329\frac{3}{14}$	„ $329\frac{5}{14}$.

Wenn eine Zahl genauer gegeben ist, als es für einen bestimmten Zweck nöthig ist, so kann man sie verkürzen d. h. die Einheiten niederer Stellen weglassen. Dabei vermehrt man die zuletzt behaltene Stelle um 1, wenn in der folgenden Stelle mehr als 5 steht. Z. B.

38,5764 ist näher 38,5760 als 38,5770, daher abgekürzt 38,576. Dieselbe Zahl ist näher 38,60 als 38,50, daher noch mehr abgekürzt 38,6.

Für 27 538 936 schreibt man 27,539 Millionen, wenn nur noch die Tausende in Betracht kommen.

0,46996 wird abgekürzt 0,4700, wenn nur noch die Zehntausendtel in Betracht kommen. Die Nullen am Ende sind in diesem Falle nicht ohne Bedeutung.

Unter der Genauigkeit einer Zahlangabe hat man das Verhältniß der Zahl zu einer Einheit der letzten angegebenen Stelle, welche nicht mehr fehlerfrei ist, zu verstehen. Z. B. die Angabe 86,43 hat die Genauigkeit 86,43 : 0,01 = 8643 d. i. von 8643 Einheiten ist nur eine nicht ganz verbürgt. Die Angaben 86,43 und 0,008 643 haben einerlei Genauigkeit, weil

$$86,43 : 0,01 = 0,008643 : 0,000001 = 8643.$$

Die Größe, von der man weiß, daß sie 8192 Fuß beträgt, ist genauer bekannt, als die Größe, von der man weiß, daß sie 0,3024 Zoll beträgt, weil

$$8192 : 1 = 8192 \quad \text{und} \quad 0,3024 : 0,0001 = 3024.$$

Am meisten Genauigkeit besitzen die astronomischen Angaben; bei den

chemischen und physikalischen Zahlen hat man die gleiche Genauigkeit nur in seltenen Fällen erreicht.

1. Addition und Subtraction.

$$\begin{array}{r} 7{,}329 \\ +\ 3{,}487 \\ \hline 10{,}81_6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}329 \\ -\ 3{,}842 \\ \hline 3{,}48_7 \end{array}$$

Hier kann der Fehler der Summe und Differenz ein halbes Tausendtel übersteigen. Bei mehreren Gliedern würde die letzte Stelle immer unsicherer werden.

$$\begin{array}{r} 0{,}013\,74 \\ +\ 9{,}256 \\ \hline 9{,}270 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}243 \\ -\ 0{,}0148 \\ \hline 9{,}228 \end{array}$$

Die Glieder werden sämmtlich bei derselben Stelle abgebrochen; schon die Zehntausendtel der Summe sind unbestimmbar, weil das eine Glied nicht bis dahin gegeben ist. Man nimmt daher 0,014 statt 0,01374.

2. Multiplication.

Ein Product kann nicht mit größerer Genauigkeit angegeben werden, als das Product des minder genauen Factors mit der höchsten Stelle des genaueren Factors. Man nimmt daher den ungenauern Factor zum Multiplicandus, den genaueren Factor zum Multiplicator, und berechnet die erste Zeile des Products wie gewöhnlich (§. 16, 2). Dann wird der Multiplicandus mehr und mehr verkürzt, und von dem rechts Auszurückenden nur dasjenige in Betracht gezogen, was auf die letzte Stelle der ersten Zeile Einfluß hat. Z. B.

$$\begin{array}{r} 5{,}392\ .\ 7{,}386 \\ \hline 37{,}744\phantom{\ .\ 7{,}386} \\ 1\,618\phantom{\ .\ 7{,}386} \\ 431\phantom{\ .\ 7{,}386} \\ 32\phantom{\ .\ 7{,}386} \\ \hline 39{,}82_5\phantom{\ .\ 7{,}386} \end{array}$$

In der zweiten Zeile ist 2 . 3 = 6 auszurücken, also wird oben 2 gestrichen, und 1 zu 539 . 3 addirt, weil 6 näher 10 als 0.

In der dritten Zeile ist noch 9 . 8 = 72 auszurücken, also oben 9 zu streichen, und 7 zu 53 . 8 zu addiren, weil 72 näher 70 als 80.

In der vierten Zeile ist noch 3 . 6 = 18 auszurücken, also oben 3 zu streichen, und 2 zu 5 . 6 zu addiren, weil 18 näher 20 als 10.

Die letzte Stelle des Products wird unsicher, weil ihr möglicher

Fehler die möglichen Fehler der letzten Stellen der einzelnen Zeilen in sich schließt.

$$\begin{array}{r} \underline{0{,}0267\ .\ 76{,}384} \\ 1{,}869 \\ 160 \\ 8 \\ \underline{2} \\ 2{,}03_9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 357\,6_{00}\ .\ 18\,47_0 & \\ = \underline{1{,}847\ .\ 3{,}576} & \text{Taus. Mill.} \\ 5{,}541 & \\ 924 & \\ 129 & \\ \underline{11} & \\ 6{,}60_5 & \text{Tausendmillionen.} \end{array}$$

3. Division.

Die höchste Stelle des Quotienten wird wie gewöhnlich (§. 17, 2) berechnet, die fernere Division abgekürzt.

a. Ist der Divisor genauer als der Dividendus, so wird der Divisor soweit verkürzt, als es zur Subtraction seines Products mit der gefundenen Stelle des Quotienten vom gegebenen Dividendus nöthig ist. Zur Fortsetzung der Division wird nicht der Rest verlängert, sondern der Divisor verkürzt. Bei jeder Multiplication wird der Einfluß der zuletzt gestrichenen Stelle des Divisor in Betracht gezogen. Z. B.

$$\begin{array}{rl} & 0{,}01034 : 94{,}65 \\ = & 1{,}034 : 9465 = 0{,}000\,109_2 \\ & 10 \\ & 103 \\ & 1034 \\ & \underline{\ \ 947} \\ & \ \ \ 87 \\ & \underline{\ \ \ 85} \\ & \ \ \ \ \ 2 \\ & \ \ \ \ \ 2 \end{array}$$

An 1034 kann 0 nicht angehängt werden; man streicht 5 am Divisor und subtrahirt 1 + 946 . 1, weil 5 näher 10 als 0.

An 87 kann 0 nicht angehängt werden; man streicht 6 am Divisor und subtrahirt 0; man streicht ferner 4 am Divisor und subtrahirt 4 + 9 . 9, weil 4 . 9 näher 40 als 30 ist.

Die letzte Stelle 2 des Quotienten (20 : 9) ist unsicher wegen des möglichen Fehlers in der letzten Stelle des Restes.

b. Ist der Divisor ungenauer als der Dividendus, so wird der Dividendus soweit verkürzt, als es zur Subtraction des Products aus der gefundenen Stelle des Quotienten mit dem Divisor nöthig ist. Die Division wird fortgesetzt wie vorhin. Z. B.

$658{,}37 : 4{,}281$
$= 65837_0 : 4281 = 153{,}8$

```
 4281
 ----
 2303
 2141
 ----
  162
  128
 ----
   34
   34
```

Der Dividendus ist näher $658\,4_{00}$ als $658\,3_{00}$, also der erste Rest 2303. Für die zweite Division wird am Divisor 1, am Rest 7 gestrichen. Für die dritte Division wird am Divisor 8, am Rest 0 gestrichen und im Quotienten das Komma gemacht, nachdem man die Einer des Dividendus dividirt hat. Für die folgende Division wird am Divisor 2 gestrichen.

$1 : 45{,}78$
$= 100 : 4578 = 0{,}021\,84$

```
 1000
10000
 9156
 ----
  844
  458
 ----
  386
  366
 ----
   20
   18
```

$4865 : 0{,}273$
$= 4865_{000} : 273 = 179_{00}$
$= 17{,}9$ Tausd.

```
273
---
214
191
---
 23
 24
```

Anwendungen.

1) 6 Thlr. 6 Sgr. 9$\frac{4}{7}$ Pf. als Decimalbruch eines Thlr. bis auf 0,01 Pf. genau anzugeben.

$\frac{4}{7}$ Pf. = 0,57 Pf.

6 Sgr. 9$\frac{4}{7}$ Pf. = 81,57 : 360 Thlr.

8,157 : 36 = 0,2266. 6 Thlr. 6 Sgr. 9$\frac{4}{7}$ Pf. = 6,2266 Thlr.

```
 72
 --
 95
 72
 --
237
216
---
 21
 22
```

Umgekehrt 0,2266 Thlr. = 0,2266 . 30
6,798 Sgr.

0,798 Sgr. = 0,798 . 12
$9{,}57_6$ Pf.

Also 0,2266 Thlr. = 6 Sgr. $9{,}57_6$ Pf.

2) Das (mittlere tropische) Jahr hat 365,242 22 (mittlere Sonnen-) Tage. Es sollen die Stunden, Minuten, Sekunden angegeben werden.

$$0{,}242\,22 \text{ Tage} = \underline{0{,}242\,22 \,.\, 24}$$
$$5{,}813\,3 \text{ Stunden.}$$
$$0{,}8133 \text{ Stunden} = \underline{0{,}8133 \,.\, 60}$$
$$48{,}798 \text{ Minuten.}$$
$$0{,}798 \text{ Minuten} = \underline{0{,}798 \,.\, 60}$$
$$47{,}8_8 \text{ Sekunden.}$$

1 Jahr = 365 Tage 5 Stunden 48 Min. 47,9 Sek.

3) 7,643 mit $\frac{5}{12}$ zu multipliciren, oder durch $\frac{5}{12}$ zu dividiren. Entweder multiplicirt man mit 5 und dividirt das Product durch 12 (§. 11, 1), oder man multiplicirt statt mit $\frac{5}{12}$ mit dem gleichgeltenden Decimalbruch von solcher Genauigkeit wie 7,643.

$$\begin{array}{l} \underline{7{,}643 \,.\, 5} \\ 38{,}215 : 12 = 3{,}184_6 \\ \;\;22 \\ \;\;101 \\ \;\;\;\;55 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{7{,}643 \,.\, 0{,}41667} \\ 3{,}0572 \\ 764 \\ 458 \\ 46 \\ \underline{5} \\ 3{,}184_5 \end{array}$$

Um durch $\frac{5}{12}$ zu dividiren, multiplicirt man mit 12 und dividirt das Product durch 5 (§. 11, 3), oder man dividirt durch den gleichgeltenden Decimalbruch.

$$\begin{array}{l} \underline{7{,}643 \,.\, 12} \\ 91\,72_6 : 5 = 18{,}34_5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7{,}643 : 0{,}41667 \\ = 76\,43_{00} : 41667 = 18{,}34_4 \\ \;\;\underline{41\,67} \\ \;\;34\,76 \\ \;\;\underline{33\,33} \\ \;\;\;\;1\,43 \\ \;\;\;\;\underline{1\,25} \\ \;\;\;\;\;\;18 \\ \;\;\;\;\;\;16 \end{array}$$

4) 7,8649 + $9\frac{2}{3}\frac{7}{8}$. Man kann $\frac{27}{38}$ nur dann unter die Hundertel abwärts entwickeln, wenn die Zahl $9\frac{27}{38}$ hinreichende Genauigkeit besitzt.

$$\begin{array}{l} 9 \\ 27 : 38 = 0{,}7105 \\ 270 \quad + 7{,}8649 \\ \underline{266} \quad \overline{17{,}5754} \\ 40 \\ \underline{38} \\ 200 \\ \underline{190} \\ 10 \end{array}$$

Um die Bruchreihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \ldots$ bis auf 0,000 001 genau zu summiren, bemerke man, daß $\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} : 3$, $\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} : 4$, u. s. f. (§. 10, 2). Die einzelnen Brüche müssen eine Stelle unter die vorgeschriebene Grenze entwickelt werden, weil die letzte Stelle der Summe durch die Addition unsicher wird.

$$\begin{array}{ll} 0{,}5 & : 3 \\ 0{,}166\,6667 & : 4 \\ 0{,}041\,6667 & : 5 \\ 0{,}008\,3333 & : 6 \\ 0{,}001\,3889 & : 7 \\ 0{,}000\,1984 & : 8 \\ 0{,}000\,0248 & : 9 \\ 0{,}000\,0028 & : 10 \\ \underline{0{,}000\,0003} & \\ 0{,}718\,282 & \end{array}$$

5) Jemand hat in 3, 5, 7 Jahren jedesmal 560 Thlr. zu bezahlen, und will sofort mit $5\frac{1}{2}$ auf Hundert jährigem Disconto seiner Schuld sich entledigen. Statt

$100 + 3 . 5\frac{1}{2}$ d. i. $116\frac{1}{2}$ Thlr. vom 1. Capital werden 100 Thlr. gezahlt.
$100 + 5 . 5\frac{1}{2}$ " " $127\frac{1}{2}$ " " 2. " " 100 " "
$100 + 7 . 5\frac{1}{2}$ " " $138\frac{1}{2}$ " " 3. " " 100 " "

Daher sind $\frac{100}{116\frac{1}{2}} + \frac{100}{127\frac{1}{2}} + \frac{100}{138\frac{1}{2}}$ des Capitals (560 Thlr.) zu entrichten.

$100 : 116\frac{1}{2} = 1000 : 1165 = 0{,}85837$

```
10000
 9320
 6800
 5825
  975
  932
   43
   35
    8
```

$100 : 127\frac{1}{2} = 0{,}78432$

$100 : 138\frac{1}{2} = 0{,}72202$

```
  2,36471 . 560
1182,355
 141 883
1324,238
```

Die Schuld wird sofort mit 1324 Thlr. 7,1 Sgr. abgetragen.

6) Wenn 131 engl. Meilen = 28 preuß. Meilen, so ist 1 engl. M. = $\frac{28}{131}$ pr. M., 1 pr. M. = $\frac{131}{28}$ engl. M.

```
28 : 131 = 0,21          131 : 28 = 4,7
262                      112
 18                       19
 13                       20
```

Ohne größere Genauigkeit der gegebenen Zahlen kann man die Decimalbrüche nicht weiter sicher berechnen.

Wenn 3,186 preuß. Fuß = 1 Meter, so ist 1 preuß. Fuß = 1 : 3,186 = 0,3139 Meter.

```
1 : 3,186 = 1000 : 3186 = 0,3139
            10000
             9558
              442
              319
              123
               95
               28
               28
```

7) Aus den Angaben: 1 preuß. Cubikzoll Wasser wiegt $\frac{1}{9}$ preuß. Loth alten Stils, 1 Cubikcentimeter davon wiegt 1 Gramm, soll das Verhältniß von Loth und Gramm berechnet werden.

1 preuß. Fuß = 0,3139 Meter = 31,39 Centimeter

$$1 \text{ preuß. Zoll} = \frac{31{,}39}{12} \text{ Centimeter}$$

$$1 \text{ preuß. Cub. Z.} = \frac{31{,}39 \cdot 31{,}39 \cdot 31{,}39}{12 \cdot 12 \cdot 12} \text{ Cub. Centim.}$$

Daher ist

$$\frac{1}{9} \text{ preuß. Loth} = \frac{31{,}39 \cdot 31{,}39 \cdot 31{,}39}{12 \cdot 12 \cdot 12} \text{ Gramm.}$$

$$1 \text{ preuß. Loth} = \frac{31{,}39 \cdot 31{,}39 \cdot 31{,}39 \cdot 9}{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 11} \text{ Gramm.}$$

31,39 : 12 = 2,616	. 2,616	6,844 . 2,616
73	5,232	13,688
19	1 570	4 106
7	26	68
	16	41
	6,844	17,903

17,903 . 9
161,13 : 11 = 14,65.
51
71
53

Ein preuß. Loth beträgt 14,65 Gramm, vorausgesetzt daß die Zahl $\frac{1}{9}$ hinreichend genau ist. In Wahrheit beträgt das preuß. Loth nur 14,626 Gramm, weil im franz. System dichtestes Wasser (4° C.), im preuß. System minder dichtes Wasser ($18\frac{3}{4}$° R.) vorausgesetzt wird.

8) Zu Neusilber nimmt man 53,4 Procent Kupfer, 29,1 Proc. Zink und 17,5 Proc. Nickel. Wieviel von diesen Metallen braucht man zu 1200 Pfd. Neusilber, wenn beim Schmelzen ein Verlust von $1\frac{1}{2}$ Proc. eintritt?

Statt 98,5 Pfd. jedes Metalls sind 100 zu nehmen, folglich

$$53{,}4 \cdot 12 \cdot \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Kupfer} = 650{,}3$$

$$29{,}1 \cdot 12 \cdot \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Zink} = 354{,}4$$

$$17{,}5 \cdot 12 \cdot \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Nickel} = 213{,}2$$

1218

Man berechnet 12000 : 985 = 12,18 und multiplicirt diese Zahl mit den Procenten.

Zweites Buch.

Allgemeine Arithmetik.

§. 1. Grundbegriffe.

1. Zwei Dinge können in Hinsicht ihrer Qualität (Beschaffenheit) und Quantität (Größe) verglichen werden. In Ansehung ihrer Qualität sind sie gleichartig, wenn ganz oder theilweise eines für das andere gesetzt werden kann, ungleichartig, wenn dieß nicht der Fall ist. In Ansehung ihrer Quantität heißen sie Größen und sind Gegenstand der mathematischen Wissenschaften.

Gleichartige Größen sind entweder gleich oder ungleich; von ungleichen Größen ist diejenige die größere, von welcher ein Theil der andern gleich ist. Das Urtheil, daß die Größe A der Größe B gleich ist, wird eine Gleichung (aequatio) genannt und $A = B$ bezeichnet. Die verglichenen Größen heißen die Seiten (linke und rechte, membra) der Gleichung. Daß die Größe C größer als die Größe D (D kleiner als C) ist, wird durch die Ungleichung $C > D$ bezeichnet. Daß die Größe C zwischen den Grenzen B und D liegt, mehr als jene und weniger als diese beträgt, wird durch die Begrenzung $B < C < D$ angegeben.

2. Die Menge gleichartiger Dinge wird durch eine Zahl bestimmt. Das mehrmal Vorzustellende heißt Einheit und ist entweder Eins ohne nähere Bestimmung (unbenannt, abstract), oder eine bestimmte Größe (benannt, concret), z. B. Zehner, Duzend, Thaler, Gulden, Fuß, Grad, Pfund, Stunde u. s. w. Eine Zahl ist größer als eine andere, wenn sie mehr Einheiten enthält, als die andere. Die unbenannten Zahlen bilden die ohne Ende aufsteigende natürliche Zahlenreihe. Um die natürlichen Zahlen mit wenig Wörtern und Zeichen (Ziffern) mittheilen zu können, haben die gebildeten Völker das Decimalsystem angenommen, nach welchem zehn Einer als ein Zehner, zehn Zehner als ein Hundert, zehn Hundert als ein Tausend, tausend Tausende als eine Million, million Millionen als eine Billion, million Billionen als eine Trillion u. s. f. betrachtet werden.

Die Griechen bezeichneten, wie die semitischen Völker, die Einer, Zehner, Hunderte durch je neun Buchstaben ihres Alphabets; die Tausende durch die Zeichen der Einer, denen Striche beigefügt wurden, die Zehntausende u. s. w. wiederum durch die Zeichen der Einer, Zehner u. s. w., denen der Name Myriaden hinzugefügt wurde. Die Abtheilung großer Zahlen nach Myriaden ist von andern Völkern nicht nachgeahmt worden. Die Römer bezeichneten einen Einer, einen Zehner, ein Hundert, ein Tausend, ferner fünf Einer, fünf Zehner, fünf Hunderte durch Schriftzeichen,

welche später von gewissen Buchstaben des gemeinen Alphabets nicht mehr unterschieden wurden; vier und neun Einer wurden durch Eins vor fünf und zehn dargestellt u. s. w.

Diese Schreibarten sind seit dem 12ten Jahrhundert der christlichen Zeitrechnung durch die von den Arabern verbreitete indische Erfindung verdrängt, nach welcher die Einer durch besondere Zeichen, die Zehner durch ihren Ort zur Linken der Einer, die Hunderte, Tausende u. s. w. durch ihren Ort zur Linken der Zehner, Hunderte u. s. w. unter Benutzung des zehnten Zahlzeichens 0 angegeben werden. Die Zahlwörter Million, Billion, . ., Milliarde (tausend Millionen) sind neuere Bildungen. Das Wort Million bedeutete im 16ten Jahrh. in der vulgären Sprache eine Geldsumme; als abstractes Zahlwort hat es erst im 18ten Jahrh. in die Rechenbücher allgemeinen Eingang gefunden. Vergl. einen Aufsatz des Verf. in den Leipz. Berichten 1865.

3. Die Zahlen und ihre Verbindungen sind Gegenstand der Arithmetik. Eine Zahlenverbindung ausführen (operiren) heißt rechnen. Zur Bezeichnung der auszuführenden Zahlenverbindungen sind bestimmte Rechnungszeichen eingeführt. Zahlen im Allgemeinen, d. h. irgend welche Zahlen, die verbunden werden sollen, werden durch verschiedene Buchstaben (große, kleine, numerirte) bezeichnet, z. B.

$$A,\quad B,\quad C,\ \ldots$$
$$a,\quad b,\quad c,\ \ldots$$
$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\ \ldots$$
$$a',\quad a'',\quad a''',\ \ldots,\ a^{(n)}$$
$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ \ldots,\ a_n$$
$$a_{11},\quad a_{12},\quad a_{13},\ \ldots,\ a_{1n}$$
$$a_{21},\quad a_{22},\quad a_{23},\ \ldots,\ a_{2n}$$

Daher nennt man die allgemeine Arithmetik auch Buchstabenrechnung (arithm. speciosa, universalis), im Gegensatz zur gemeinen Rechenkunst (logistica, arithm. numerosa), welche von jener eine Anwendung ist. Unter höherer Arithmetik (Zahlenlehre, théorie des nombres) versteht man die Lehre von den Eigenschaften der ganzen Zahlen und ganzzahligen Formen.

Bei Euclides werden allgemeine Zahlen durch Strecken bezeichnet, und Zahlenverbindungen durch Constructionen erläutert. Diophantus (in der zweiten Hälfte des 4ten Jahrh. n. Chr.) gebraucht die Anfangsbuchstaben unbestimmter Größen als Zahlzeichen, welche gegen den Anfang des Mittelalters numeri cossici (cossa, cosa, chose), später species genannt wurden. Deutlichere Anfänge der Buchstabenrechnung finden sich bei Regiomontan 1460 (algorithmus demonstratus. Nürnberg 1534. Vergl. Chasles aperçu hist. p. 621 der deutschen Uebers.), und Stifel (arithm. integra 1544 fol. 252), in größerer Ausdehnung aber erst bei Vieta in der zweiten Hälfte des 16ten Jahrh.

4. Die Sätze der mathematischen Wissenschaften sind entweder Definitionen, oder Theoreme, oder Axiome. Die Definition (ὁρισμός, Erklärung) dient zur Verständigung über einen zusammengesetzten Begriff. Ein Theorem (θεώρημα, Lehrsatz, Satz, propositio) knüpft an eine Voraussetzung (ὑπόθεσις) eine Behauptung (θέσις). Axiom (ἀξίωμα, Grundsatz) ist eine Behauptung, deren Anerkennung ohne Wei-

teres gefordert wird. Die gerühmte Richtigkeit der mathematischen Wissenschaften beruht darauf, daß die Anzahl ihrer Axiome äußerst gering ist, und daß ihre Theoreme sich (logisch) beweisen und (empirisch) prüfen lassen. Der Beweis (*ἀπόδειξις*, demonstratio) wird direct geführt, wenn man aus der Voraussetzung durch Schlüsse die Behauptung ableitet; indirect (apagogisch, *ἀπαγωγή*, deductio ad absurdum) wenn man aus der Verneinung der Behauptung durch Schlüsse die Verneinung der Voraussetzung ableitet. Ein Schluß (*συλλογισμός*) besteht aus Prämissen und der Conclusion, z. B. wenn $A = B$ und $B = C$, so ist $A = C$; wenn $A > B$, $B > C$, so ist $A > C$; Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert giebt Gleiches u. s. f.

Abgesehen von diesen aus dem Begriff der Gleichheit hervorgehenden Schlüssen bedarf der erste Theil der mathematischen Wissenschaften (Arithmetik, Algebra, Analysis) keiner Axiome, während die folgenden Theile (Geometrie, Mechanik) nicht ohne einige Axiome begründet werden können.

In den älteren Darstellungen bedeutet corollarium ein Theorem, welches einem andern untergeordnet und aus demselben leicht ableitbar ist; lemma (zu *λαμβάνω*) ein Theorem, welches einer andern Reihe angehörig zur Begründung eines umfassenderen Theorems vorausgeschickt wird.

§. 2. Die Summe.*)

(Heis §. 1 und 7).

1. Die Summe zweier Zahlen entsteht durch Hinzuzählen (Addition) der Einheiten der zweiten Zahl zu der ersten Zahl. Beide Zahlen heißen Glieder (termini, termes) der Summe. Die Summe der Zahlen a und b, wird bezeichnet $a + b$, gelesen a plus b.

2. Die Glieder einer Summe können nicht anders als gleichbenannt sein, die Summe ist mit den Gliedern gleichbenannt.

3. Die Ordnung der Glieder einer Summe ist beliebig:

$$a + b = b + a$$

$$a + b + c = b + a + c = a + c + b.$$

Denn die Reihe von a Einheiten, zu denen b Einheiten addirt worden,

$$\overset{1}{\breve{1}} + \overset{2}{\breve{1}} + \overset{3}{\breve{1}} + \ldots + \overset{a}{\breve{1}} + \overset{1}{\breve{1}} + \overset{2}{\breve{1}} + \overset{3}{\breve{1}} + \ldots + \overset{b}{\breve{1}}$$

erscheint vom Ende aus als die Reihe von b Einheiten, zu denen a Einheiten addirt worden.

Die Summe $a + b + c$ erscheint nicht nur als Summe der

*) Für den Zweck der Einübung sind bei den Paragraphen des zweiten und dritten Buchs die entsprechenden Paragraphen von Heis' Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra angegeben worden.

Glieder $a + b$ und c, sondern auch als Summe der Glieder a und $b + c$, und ist daher gleichgeltend mit $b + a + c$ und $a + b + c$. Aus einer gegebenen Anordnung der Glieder lassen sich dadurch, daß man die Plätze von benachbarten Gliedern vertauscht, alle möglichen Anordnungen ableiten.

§. 3. Das Product.

(Heis §. 3 und 15, 8—16.)

1. Product heißt die Summe von gleichen Gliedern. Das mehrmal gesetzte Glied heißt Multiplicandus, die Anzahl der gleichen Glieder Multiplicator. Das Product der Zahlen a und b d. h. die Summe von b Gliedern, deren jedes a ist, wird bezeichnet ab oder $a\,.\,b$ oder $a \times b$, gelesen a multiplicirt mit b oder $b$mal a. Das Multiplicationszeichen kann nicht fehlen, wenn der Multiplicator eine gemeine Zahl ist.

$$a\,.\,2 = a + a$$
$$a\,.\,3 = a + a + a$$
$$ab = \underbrace{a}_{1} + \underbrace{a}_{2} + \underbrace{a}_{3} + \,.\,.\, + \underbrace{a}_{b}$$

2. Ein Multiplicator kann nicht anders als unbenannt sein, das Product ist mit dem Multplicandus gleichbenannt (§. 2, 2).

3. Multiplicandus und Multiplicator können ohne Aenderung des Products vertauscht werden und heißen deshalb Factoren des Products. Die Ordnung der Factoren eines Products ist beliebig:

$$ab = ba$$
$$abc = bac = acb = \ldots$$
$$\begin{array}{c} 5 \times 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 \times 5. \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

Denn 3 Zeilen von je 5 Einheiten erscheinen von der Seite betrachtet als 5 Colonnen von je 3 Einheiten. Ebenso sind c Zeilen von je b Gliedern a zugleich b Colonnen von je c Gliedern und enthalten zusammen bc Glieder (§. 2, 3).

Man schreibt gewöhnlich $2a$, $3a$, . . statt $a.2$, $a.3$, . . , so daß $5a = 2a + 3a$ u. s. w. Um mit bc zu multipliciren, kann man mit b multipliciren und das Product wiederum mit c. Man findet $3a\,.\,2b = 6ab$, u. s. w.

Wenn das Product von n Factoren von der Anordnung der Operation unabhängig ist, so ist auch das Product von $n + 1$ Factoren a, b, c, d, e, . . von der Anordnung der Operation unabhängig. Man führt dieses Product auf ein Product

von n Factoren dadurch zurück, daß man entweder a mit b, oder a mit einem andern Factor c, oder ein anderes Paar Factoren c mit d zu einem Product vereint. Nach der Voraussetzung findet man gleiche Producte aus den Systemen von Factoren

$ab, c, d, e, ..$ und $abc, d, e, ..$
$ac, b, d, e, ..$ und $acb, d, e, ..$
$a, b, cd, e, ..$ und $ab, cd, e, ..$
$ab, c, d, e, ..$ und $ab, cd, e, ..$

Nun ist $acb = abc$, folglich stimmen alle diese Producte von n Factoren überein, und das Product von $n + 1$ Factoren ist von der Anordnung der Operation unabhängig. Diese Unabhängigkeit findet aber bei 3 Factoren statt, also auch bei 4, 5, .. Factoren (Dirichlet Zahlentheorie von Dedekind §. 2).

§. 4. Die Potenz.

(Heis §. 5).

Potenz heißt das Product von gleichen Factoren. Der mehrmal gesetzte Factor heißt Dignandus, die Anzahl der gleichen Factoren Exponent. Dignandus, Exponent und Potenz können nicht anders als unbenannt sein. Die $b$te Potenz von a, d. h. das Product von b Factoren, deren jeder a ist, wird bezeichnet a^b, gelesen a potenzirt mit b, oder a zur $b$ten (Potenz), oder a hoch b. Die erste Potenz einer Zahl ist die Zahl selbst; die zweite Potenz der Zahl wird ihr Quadrat genannt, die dritte Cubus, die vierte Biquadrat. Coefficient einer Potenz heißt ein von dem Dignandus unabhängiger Factor der Potenz oder das Product solcher Factoren.

$$a^2 = aa, \quad a^3 = aaa, \quad a^5 = a^4 a = a^3 a^2$$

$$a^b = \underbrace{a}_{1}\,\underbrace{a}_{2}\,\underbrace{a}_{3}\,..\,\underbrace{a}_{b}$$

$$3a\,.\,2a = 6a^2, \quad 2ab^2\,.\,7a^2b^3 = 14a^3b^5, \quad a^b a = a^{b+1}.$$

Dignandus und Exponent können im Allgemeinen nicht vertauscht werden. Es ist zwar $2^4 = 4^2$, aber 2^3 ist von 3^2 verschieden, u. s. w.

§. 5. Die indirecten Operationen.

(Heis §§. 2. 4. 41. 56).

1. Wenn die Summe und ein Glied gegeben ist, so läßt sich das andere Glied bestimmen, indem man zu dem gegebenen Gliede ein hinreichendes Glied (Differenz) addirt.

2. Wenn das Product und ein Factor gegeben ist, so läßt sich der andere Factor bestimmen, indem man den gegebenen Factor mit einem hinreichenden Factor (Quotient) multiplicirt.

3. Wenn die Potenz und der Exponent gegeben ist, so läßt sich der Dignandus bestimmen, indem man eine hinreichende Zahl (Wurzel) mit dem gegebenen Exponenten potenzirt.

Wenn die Potenz und der Dignandus gegeben ist, so läßt sich der Exponent bestimmen, indem man den Dignandus mit einer hinreichenden Zahl (Logarithmus) potenzirt.

Auf das Potenziren gründen sich zwei indirecte Operationen, weil Dignandus und Exponent nicht vertauschbar sind.

§. 6. Die Formeln.

(Heis §. 6).

1. Formel (formula, forma) heißt eine Verbindung von Zahlen durch Rechnungszeichen, z. B. $a + b$, ab, a^b. Ein Product (Potenz) heißt eintheilig (mononomium, verkürzt monomium); eine Summe heißt nach der Anzahl ihrer Glieder zweitheilig, dreitheilig, vieltheilig (binomium, trinomium, polynomium).

2. Formeln werden wie einzelne Buchstaben durch Rechnungszeichen verbunden, nachdem man sie in Klammern eingeschlossen hat (παρ-έν-θεσις, Parenthese). Zur Einschließung von Parenthesen gebraucht man Klammern von verschiedener Gestalt. Die Einschließung ist unnöthig, wenn eine Summe zu addiren, ein Product zu multipliciren ist (§. 2, 3 und §. 3, 3), z. B.

$$a + (b + c) = a + b + c, \quad (ab)c = a(bc) = abc.$$

Bei Eucl. X, 37 wird die zweitheilige Formel $a + \sqrt{b}$ als ἐκ δύο ὀνομάτων (ex binis nominibus) bezeichnet; davon ist das Wort binomium gebildet, dessen besonderer Sinn bis ins 18te Jahrhundert sich erhalten hat. Die richtigeren Bildungen unimonium, multinomium haben keinen Eingang gefunden. Vieta (1580) machte über die zusammengehörigen Glieder Striche, wie sie noch bei den Wurzeln der mehrtheiligen Formeln gebraucht werden. Der Gebrauch der Klammern, welche bei Girard 1629 (vergl. Klügel math. W. I. p. 52) vorkommen, ist im 18ten Jahrhundert allgemein geworden.

Die jetzt gebräuchlichen Rechnungszeichen sind sämmtlich nach Erfindung des Bücherdrucks eingeführt worden. Das Gleichheitszeichen (=), welches zuerst Recorde 1552 gebraucht hat (vergl. Klügel math. W. I. p. 42), kam erst 100 Jahre später in allgemeinern Gebrauch. Das Ungleichheitszeichen ($<$) kommt im Anfange des 17ten Jahrhunderts bei Harriot vor (Klügel I. p. 50). Die Wörter plus und minus wurden in Italien und Frankreich zuerst durch die Anfangsbuchstaben p und m, in Deutschland aber schon in der zweiten Hälfte des 15ten Jahrhunderts durch + und — bezeichnet (vergl. Drobisch de Widmanni compendio 1489 edito. 1840 p. 20). Diese Zeichen werden jedoch einem bestimmten Erfinder nicht zugeschrieben, und sind deshalb vielleicht nichts weiter als Deformationen jener Buchstaben. Eine andere Ansicht über den Ursprung derselben Zeichen hat de Morgan (Athenaeum n. 1931 p. 565, 1864 Oct. 29) angedeutet.

Die Zusammenstellung der Factoren eines Products ohne Rechnungszeichen findet sich bei Stifel arithm. 1544 fol. 225; das Multiplicationszeichen ($\times$) kommt bei Oughtred (clavis math. 1631), der Punct bei Leibniz in der zweiten Hälfte des 17ten Jahrhunderts vor. Bei Diophantus und seinen Nachfolgern wird eine unbestimmte Zahl (die Unbekannte) ἀριθμός, res, cosa, radix genannt; ihr Quadrat δύναμις, potentia, potestas, census, censo in Folge des alten Gebrauchs der Wörter δύναμις, δύνασθαι (Eucl. El. X); ihre dritte Potenz κῦβος, cubus. Die höheren Potenzen führen zusammengesetztere Namen δυναμο-δύναμις u. s. f.

Den Namen dignitas hat Bombelli 1572 gebraucht, während potestas und coefficiens durch Vieta üblich geworden ist. Die Bezeichnung der Potenzen ward durch Stifel vorbereitet, welcher der Reihe 1, $1A$, $1AA$, $1AAA$, . . die Nummern 0, 1, 2, 3, . . überschrieb, die er Exponenten nannte (arithm. fol. 250 und in der Herausgabe von Christ. Rudolff's Coss. 1553 fol. 62). Nachdem Stevin 1585 (vergl. Klügel math. W. I. p. 43) die Benennung der Potenzen nach ihren Exponenten eingeführt hatte, wurde die jetzige Bezeichnung der Potenzen durch Herigogne (cursus math. Paris 1634) und besonders durch Descartes 1637 verbreitet.

§. 7. Die Differenz.

(Heis §. 2).

1. Die Differenz (Unterschied) zweier Zahlen ist die Zahl, zu welcher die zweite addirt die erste giebt. Die erste Zahl heißt Minuendus, die zweite Subtrahendus, so daß

Differenz + Subtrahendus = Minuendus.

Die Differenz von a und b wird bezeichnet $a - b$, gelesen a minus b. Die Berechnung einer Differenz heißt Subtraction und kommt durch Abzählen der Einheiten des Subtrahenden vom Minuenden zu Stande. Um eine Differenz zu prüfen, hat man zu ihr den Subtrahenden zu addiren und die Summe mit dem Minuenden zu vergleichen. Insbesondere ist $a + b - b = a$, $a + b + c + d - (c + d) = a + b$, $5a - 3a = 2a$ u. s. f. Aus der Begrenzung $a < x < b$ schließt man, daß $x - a < b - a$.

2. Minuend und Subtrahend können nicht anders als gleichbenannt sein, die Differenz ist mit ihnen gleichbenannt und giebt an, um wieviel größer der Minuend ist als der Subtrahend.

3. Wenn der Minuend dem Subtrahenden gleich ist, so ist die Differenz 0 (Null, ziphra, zéro). Wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, so kann die Differenz in Form eines Subtrahenden (ohne Minuenden) angegeben werden, z. B.

$$7 - 7 = 0$$
$$7 - 8 = -1$$
$$7 - 9 = -2$$
$$a - (a + c) = -c$$
$$a - b = -(b - a)$$

weil von a nicht mehr als a subtrahirt werden kann, folglich $b - a$ zu subtrahiren bleibt.

Um alle Subtractionen ohne Ausnahme ausführen zu können, setzt man die Reihe der natürlichen Zahlen rückwärts über Null fort durch Zahlen, welche das Zeichen der Subtrahenden (—) vor sich tragen und negativ genannt werden, während die natürlichen Zahlen, denen

zur Verdeutlichung des Gegensatzes das Additionszeichen (+) vorgesetzt werden kann, positiv heißen:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Die negativen Zahlen sind ebenso aus der negativen Einheit gebildet, als die positiven Zahlen aus der positiven Einheit. Die Differenz $a - b$ wird erreicht, wenn man in dieser Reihe von Null an a Glieder vorwärts (rechts) und von da an b Glieder rückwärts geht.

Die positiven Zahlen betragen mehr als Null. Von den negativen Zahlen muß gesagt werden, daß sie weniger als Null betragen, weil eine Differenz abnimmt, wenn ihr Subtrahend wächst, z. B.

$$7 - 6, \quad 7 - 7, \quad 7 - 8, \ldots$$

bilden eine Reihe von mehr und mehr abnehmenden Gliedern. Aus dem Obersatz $-5 < 0$ leitet man durch Addition von 5 den richtigen Schlußsatz $0 < 5$ ab.

4. Eine Differenz kann als eine Summe betrachtet werden, von welcher ein Glied negativ (ein Subtrahend) ist. Demnach wird das Binomium $a + (-b)$ durch die Differenz $a - b$ erklärt. Denselben Werth hat $-b + a$, weil $-b + a + b = -b + b + a = a$.

Zwei Zahlen heißen entgegengesetzt gleich, wenn die eine soviel negative Einheiten als die andere positive hat, mithin ihre Summe 0 ist, z. B. 1 und -1, c und $-c$, $a - b$ und $b - a$ oder $-a + b$.

Zwei Größen heißen entgegengesetzt, wenn eine einem Theil der andern entgegengesetzt gleich ist, mithin ihre durch Subtraction gebildete Summe kleiner ist als die größere von beiden Größen. Z. B. eine positive und eine negative Zahl (von entgegengesetzten Zeichen), Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust, Fortschritt und Rückschritt, Hebung und Senkung, Beschleunigung und Verzögerung, Abstoßung und Anziehung, Pressung und Spannung u. s. w.

Wer a Thaler besitzt und b Thaler schuldet, hat $a - b$ Thaler Vermögen d. h. entweder $a - b$ Thaler wirkliches Vermögen, wenn $a - b$ positiv, oder kein Vermögen, wenn $a - b$ Null, oder $b - a$ Thaler Schulden, wenn $a - b$ negativ ist. Schulden lassen sich also als negatives Vermögen und umgekehrt Vermögen als negative Schulden in Rechnung bringen, Vermögen und Schulden sind entgegengesetzte Größen.

Ein Punkt, der von einem gegebenen Punkte aus $a - b$ Fuß vorwärts gelegen ist, liegt entweder wirklich vorwärts von dem gegebenen Punkte aus, oder auf dem gegebenen Punkte selbst, oder rückwärts von demselben, je nachdem $a - b$ positiv, Null, negativ ist. U. s. f.

§. 8. Summe und Differenz von Polynomien.

(Heis §§. 8—13).

1. Um von einer Summe eine Zahl zu subtrahiren, kann man von einem ihrer Glieder dieselbe subtrahiren.

$$a + b - c = a + (b - c) = a - c + b.$$

Beweis. Wenn man zu $a + (b - c)$ oder zu $a - c + b$ den Subtrahenden c addirt, indem man mit $b - c + c = b$ oder mit $a - c + c = a$ beginnt (§. 2, 3), so erhält man $a + b$, den Minuenden (§. 7, 1).

Umgekehrt: Eine Differenz wird addirt, indem man den Minuenden addirt und den Subtrahenden subtrahirt in beliebiger Ordnung.

2. Um eine Summe zu subtrahiren, hat man ihre einzelnen Glieder zu subtrahiren. Um eine Differenz zu subtrahiren, hat man den Minuenden zu subtrahiren und den Subtrahenden zu addiren.

$$a - (b + c) = a - b - c.$$
$$a - (b + c) = a - b + c.$$

Beweis. Wenn man zu $a - b - c$ den Subtrahenden $b + c$ addirt, indem man mit $a - b - c + c = a - b$ beginnt, so erhält man a, den Minuenden, weil $a - b + b = a$.

Wenn man zu $a - b + c$ den Subtrahenden $b - c$ addirt, indem man erst c subtrahirt, dann b addirt (1), so erhält man a, den Minuenden.

Daher ist auch $-4a + 7a = 3a$, $-5a + 2a = -3a$, $-4a - 3a = -7a$.

3. Um ein Polynomium (Summe oder Aggregat von positiven und negativen Gliedern) zu addiren, addirt man in beliebiger Ordnung seine einzelnen Glieder (ohne Aenderung der Zeichen). Um ein Polynomium zu subtrahiren, addirt man seine einzelnen Glieder mit den entgegengesetzten Zeichen (die positiven mit dem Zeichen $-$, die negativen mit dem Zeichen $+$).

$$a + (b - c + d) = a + (b - c) + d = a + b - c + d \quad (1).$$

Ein zu addirendes Polynomium braucht also nicht in Klammern geschlossen zu werden. Dagegen ist (2)

$$a - (b - c + d) = a - (b - c) - d$$
$$= a - b + c - d.$$

Den Binomien (Summen) wurden im Alterthum Residuen (Differenzen) gegenübergestellt; die Differenzen wurden in Excesse und Defecte unterschieden. Die Einführung der negativen Zahlen zur Beseitigung dieser Unterscheidung bildet einen wesentlichen Fortschritt der Neuern, welcher fast zugleich mit der Einführung der Buchstabenrechnung im 16ten Jahrh. begonnen und im 17ten Jahrh. vollendet wurde. Vergl. Klügel math. W. I. p. 30 ff. Die Ausdrücke numerus verus und fictus (falsus)

kommen bei Cardano u. A. vor, die Benennungen affirmativ (positiv) und negativ bei Vieta. Aggregat bedeutet noch bei Vieta nur eine Summe von positiven Gliedern. Die Bezeichnung eines positiven oder negativen Werthes durch einen und denselben Buchstaben rührt hauptsächlich von Descartes (Geom. 1637) her; den Nutzen dieser Bezeichnung mußte noch Newton für Leibniz ausdrücklich hervorheben (Brief an Leibniz 1676 Oct. 24).

§. 9. Product von Polynomien.

(Heis §§. 14—16).

1. Um ein Polynomium zu multipliciren, hat man seine einzelnen Glieder zu multipliciren:

$$(a - b + c)m = am - bm + cm.$$

Beweis. Die Summe von m Gliedern, deren jedes $a - b + c$ ist, hat m Glieder, deren jedes a, ferner m Glieder, deren jedes $-b$, endlich m Glieder, deren jedes c ist (§. 3, 1. §. 8, 3).

2. Um mit einem Polynomium zu multipliciren, hat man mit seinen einzelnen Gliedern zu multipliciren. Die einzelnen Producte erhalten die Zeichen der Glieder, mit denen man multiplicirt.

Beweis. $m(a - b + c) = (a - b + c)m$ nach §. 3, 3.
$= am - bm + cm$ (1)
$= ma - mb + mc.$

Anm. Ein Multiplicator kann an sich weder positiv, noch negativ sein (§. 3, 2). Mit einer positiven oder negativen Zahl multipliciren, sagt man abkürzend für „multipliciren mit der unbezeichneten (absoluten) Zahl und das Product addiren oder subtrahiren."

3. Um ein Polynomium mit einem Polynomium zu multipliciren, hat man die einzelnen Glieder des einen mit jedem Gliede des andern zu multipliciren. Factoren von einerlei Zeichen geben ein positives, von entgegengesetzten Zeichen ein negatives Product*).

Beweis. $(a - b)(c - d) = (a - b)c - (a - b)d$ nach (2)
$= ac - bc - (ad - bd)$ nach (1)
$= ac - bc - ad + bd$ nach §. 8, 2.

Die Producte $+ac$, $-bc$, $-ad$, $+bd$ kann man ansehen als entstanden aus den Multiplicationen von $+a$ mit $+c$, $-b$ mit $+c$, $+a$ mit $-d$, $-b$ mit $-d$ (2, Anm.).

Man findet

$$(a - b)(c - d) = -(b - a)(c - d)$$
$$= -(a - b)(d - c)$$
$$= (b - a)(d - c)$$

*) Diese Regel wird schon im Alterthum namentlich bei Diophantus (Arithm. I. def. 9) angewendet. Man hatte sie aus Eucl. El. II. abgeleitet.

übereinstimmend mit der für die Zeichen der Producte abgeleiteten Regel.

4. Umgekehrt: Die Glieder eines Polynomium, welche Producte sind mit einem gemeinschaftlichen Factor, lassen sich vereinigen, indem man denselben vor eine Parenthese setzt, in der die nicht gemeinschaftlichen Factoren mit den Zeichen der einzelnen Glieder oder mit den entgegengesetzten Zeichen stehen, je nachdem der gemeinschaftliche Factor das Zeichen + oder — hat.

$$a + bd - cd = a + d(b - c) = a - d(-b + c)$$
$$ab - bc - ad + bd = c(a - b) - d(a - b)$$
$$= (a - b)(c - d).$$

Wenn zwei Polynomien nach fallenden Potenzen eines Buchstabens geordnet sind, so kann ihr Product als ein nach fallenden Potenzen desselben Buchstabens geordnetes Polynomium dargestellt werden.

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)(fx^2 + gx + h)$$
$$= afx^5 + bfx^4 + cfx^3 + dfx^2$$
$$+ agx^4 + bgx^3 + cgx^2 + dgx$$
$$+ ahx^3 + bhx^2 + chx + dh$$
$$= afx^5 + (bf + ag)x^4 + (cf + bg + ah)x^3$$
$$+ (df + cg + bh)x^2 + (dg + ch)x + dh.$$

Hierin ist die Anleitung zur Multiplication mehrziffriger Decimalzahlen enthalten, weil $ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine Decimalzahl bedeutet, wenn $x = 10$ und a, b, c, d Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2,.., 9 sind.

5. Bemerkenswerthe Beispiele.

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

u. s. w. Die Entwickelung der Potenzen von $a - b$ erhält man, wenn man b mit $-b$ vertauscht, wodurch b^2, b^4,.. nicht verändert, aber b^3, b^5, . . negativ werden, so daß Reihen von Gliedern mit abwechselnden Zeichen entstehen.

II. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$,

u. s. w. Das Quadrat eines Polynomium besteht aus der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder und der doppelten Producte aus je zwei Gliedern. Die Zeichen der doppelten Producte sind durch die Zeichen der Glieder bestimmt, aus denen sie gebildet werden (3).

III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$$

$$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4$$

u. s. w. Durch Vertauschung von b mit $-b$ erhält man

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$$

$$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a + b) = a^4 - b^4$$

IV. Wenn $x + y = u$, $xy = v$, so ist

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v$$

$$x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$$

$$x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$$

$$x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$$

$$x^6 + y^6 = u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 - 2v^3$$

u. s. w. Denn es ist

$$x^2 + y^2 = (x + y)(x + y) - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x^2 + y^2)(x + y) - (x + y)xy$$

$$x^4 + y^4 = (x^3 + y^3)(x + y) - (x^2 + y^2)xy$$

u. s. w. Aehnliche Gleichungen erhält man, wenn man y mit $-y$, folglich v mit $-v$ vertauscht.

V. $(a^2 + nb^2)(a_1{}^2 + nb_1{}^2) = (aa_1 + nbb_1)^2 + n(ab_1 - a_1b)^2$.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 + d_1{}^2)$$

$$= (aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1)^2 + (ab_1 - a_1b + cd_1 - c_1d)^2$$

$$+ (ac_1 - a_1c + db_1 - d_1b)^2 + (ad_1 - a_1d + bc_1 - b_1c)^2.$$

Diese Producte haben dieselbe Form, als ihre Factoren.

§. 10. Der Quotient.

(Heis §§. 17. 20).

1. Der Quotient zweier Zahlen ist die Zahl, welche mit der zweiten multiplicirt die erste giebt. Die erste Zahl heißt Dividendus, die zweite Divisor, so daß

Quotient $\times$ Divisor = Dividendus.

Der Quotient von a und b wird bezeichnet $\frac{a}{b}$ oder $a : b$*), gelesen a durch b (dividirt) oder das Verhältniß von a zu b oder b in a (divi-

*) Ueber die griechische Bezeichnung der Brüche vergl. Nesselmann Gesch. d. Algebra p. 114. Der Bruchstrich scheint zugleich mit den indischen Ziffern eingeführt worden zu sein; man findet ihn bei Leonardo von Pisa (liber abaci, fol. 11). Das Colon dient bei den Engländern im 17ten Jahrh. als Trennungszeichen; der jetzige Gebrauch desselben rührt von Leibniz her. Das Pell'sche Zeichen ÷, welches dem Dividendus nachgesetzt wurde, kommt in England bis in's 18te Jahrh. vor.

dirt). Die Berechnung eines Quotienten heißt Division. Um den Quotienten $a : b$ zu bilden, hat man die Vielfachen des Divisor b, $2b$, $3b$, . . mit dem Dividenden zu vergleichen. Um den Quotienten zu prüfen, hat man ihn mit dem Divisor zu multipliciren und das Product mit dem Dividenden zu vergleichen. Insbesondere ist

$$\frac{a}{a} = 1, \quad \frac{ab}{b} = a, \quad \frac{abcd}{cd} = ab, \quad \frac{a^5}{a^3} = a^2.$$

2. Wenn der Dividend benannt ist, so muß der Divisor entweder unbenannt oder gleichbenannt sein. Im ersten Falle ist der Quotient der sovielte Theil des Dividenden, als der Divisor angiebt, also mit dem Dividenden gleichbenannt. Im zweiten Falle ist der Quotient das Verhältniß*) des Dividenden zum Divisor d. h. die Zahl (unbenannt), welche angiebt, wievielmal der Divisor im Dividenden enthalten ist, wievielmal so groß der Dividend ist als der Divisor.

28 Thaler : 4 = 7 Thaler, weil 7 Thlr. $\times$ 4 = 28 Thaler; der 4te Theil von 28 Thalern beträgt 7 Thaler.

28 Thaler : 4 Thaler = 7, weil 4 Thaler $\times$ 7 = 28 Thaler; das Verhältniß von 28 Thalern zu 4 Thalern ist 7, d. h. 4 Thaler sind in 28 Thalern 7mal enthalten oder 28 Thaler sind 7mal so viel als 4 Thaler.

Wenn a und b unbenannt sind, so kann $a : b$ sowohl den $b$ten Theil von a als auch das Verhältniß von a zu b bedeuten.

3. Wenn der Dividend a einem Vielfachen des Divisor b nicht gleich ist, so läßt sich der Quotient $a : b$ durch natürliche Zahlen nicht genau angeben, sondern nur begrenzen, z. B.

$$3 < 22 : 7 < 4,$$

d. h. 22 : 7 liegt zwischen 3 und 4, weil 22 zwischen 3 . 7 und 4 . 7 liegt.

Liegt a zwischen den Grenzen bx und $b(x + 1)$, so fällt der Quotient $a : b$ zwischen x und $x + 1$, und x heißt die ganze Zahl des Quotienten $a : b$, die Differenz $a - bx$ heißt der Rest dieser Division. Wenn a näher an $b(x + 1)$ als an bx liegt, so ist der Quotient näher $x + 1$ als x; nimmt man nun $x + 1$ als die genauere ganze Zahl des Quotienten, so nennt man die negative Zahl $a - b(x + 1)$ den kleinsten Rest der Division. Wenn der Rest 0 ist, so ist x der genaue Quotient und man sagt, die Division geht auf, a ist durch b theilbar (ohne Rest).

Ueberhaupt wenn $a = bx + y$ ist, so kann man x als die ganze Zahl und y als den Rest der Division $a : b$ betrachten.

---

*) λόγος, ratio, proportio, rapport.

4. Um alle Divisionen ohne Ausnahme ausführen zu können, denkt man eine Einheit (deren Vielheiten die natürlichen Zahlen sind) in so viel gleiche Theile getheilt, als der Divisor angiebt. Ein solcher Theil $\left(\frac{1}{b}\right)$ heißt eine gebrochene Einheit, eine Mehrheit derselben eine gebrochene Zahl, ein Bruch (fractio). Die Anzahl der gebrochenen Einheiten eines Bruches heißt der Zähler (numerator), die Anzahl der Theile, in welche eine natürliche Einheit gebrochen ist, der Nenner (denominator) des Bruches. Im Gegensatz zu den Brüchen werden die natürlichen Zahlen ganz (integer) genannt. Die Summe einer ganzen und einer gebrochenen Zahl heißt eine gemischte Zahl.

Jeder Quotient läßt sich als Bruch darstellen, dessen Nenner der Divisor, dessen Zähler der Dividend ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}\,a.$$

(Die Einschließung von $\frac{1}{b}$ in Klammern ist überflüssig). Denn wenn man $\frac{1}{b}\,a$ mit dem Divisor b multiplicirt, indem man mit $\frac{1}{b}\,b = 1$ beginnt, so erhält man a, den Dividenden.

Der Bruch heißt uneigentlich, wenn der Zähler ein Vielfaches des Nenners, echt (genuina), wenn der Zähler kleiner als der Nenner, unecht (spuria), wenn der Zähler größer als der Nenner. Der uneigentliche Bruch ist einer ganzen Zahl gleich, der echte Bruch beträgt weniger als 1, der unechte Bruch beträgt mehr als 1.

§. 11. Quotient von Producten.

(Heis §§. 21. 22. 18. 23. 24).

1. Um durch ein Product zu dividiren, kann man durch seine Factoren nach einander dividiren:

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

Beweis. Wenn man den Quotienten $\frac{a}{b} : c$ mit dem Divisor bc multiplicirt d. h. $\frac{a}{b} : c$ mit c und das Product $\frac{a}{b}$ mit b (§. 3, 3), so erhält man a, den Dividenden (§. 10, 1). Denselben erhält man, wenn man $\frac{a}{c} : b$ mit b und das Product mit c multiplicirt.

Umgekehrt: Um einen Bruch zu dividiren, multiplicirt man den Nenner.

2. Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}.$$

Beweis. $\frac{am}{bm} = \frac{am}{m} : b \; (1) = \frac{a}{b}.$

$$\frac{a : n}{b : n} = \frac{(a : n)n}{(b : n)n} = \frac{a}{b}.$$

3. Um ein Product zu dividiren, kann man einen Factor desselben dividiren:

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}\, b = \frac{b}{c}\, a.$$

Beweis. Wenn man $\frac{a}{c}\, b$ mit dem Divisor c d. h. $\frac{a}{c}$ mit c und das Product mit b multiplicirt, so erhält man ab, den Dividenden. Denselben erhält man, wenn man $\frac{b}{c}\, a$ mit c d. h. $\frac{b}{c}$ mit c und das Product mit a multiplicirt.

Umgekehrt: Um einen Bruch zu multipliciren, multiplicirt man den Zähler.

4. Mit einem Bruche multipliciren sagt man abkürzend für dividiren durch seinen Nenner und multipliciren mit seinem Zähler, wobei die Ordnung der Operationen beliebig ist. Mit $\frac{b}{c}$ multipliciren heißt den $c$ten Theil $b$mal setzen oder das $b$fache durch c dividiren.

$$a\,\frac{b}{c} = \frac{a}{c}\, b = \frac{ab}{c} = \frac{b}{c}\, a.$$

Die 3 letzten Formeln stimmen überein nach (3).

Ein Multiplicator kann an sich nicht gebrochen sein (§. 3, 2). Die Ordnung der Factoren eines Products ist auch dann beliebig, wenn Factoren Brüche sind.

5. Um einen Bruch mit einem Bruche zu multipliciren, multiplicirt man den Zähler mit dem Zähler, den Nenner mit dem Nenner:

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Beweis. $\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\, c\right) : d$ (4). Nun ist $\frac{a}{b}\, c = \frac{ac}{b}$ (3) und $\frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd}$ (1).

6. Um durch einen Bruch zu dividiren, multiplicirt man mit dem reciproken (umgekehrten) Bruche, welcher durch die Vertauschung von Nenner und Zähler entsteht:

$$a : \frac{b}{c} = a\,\frac{c}{b}.$$

Beweis. Wenn man $a\frac{c}{b}$ mit dem Divisor $\frac{b}{c}$ multiplicirt (4), so erhält man $\frac{acb}{bc}$ (5) $= a$, den Dividenden.

7. Zwei Zahlen heißen reciprok, eine das Reciproke der andern, wenn ihr Product 1 ist. Eine derselben wird gefunden, indem man 1 durch die andere dividirt. Z. B. a und $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ sind reciprok; das Reciproke eines echten Bruches ist ein unechter Bruch. Kleinheit und Größe, Nähe und Ferne, Langsamkeit und Geschwindigkeit u. dgl. können als reciprok betrachtet werden. Wenn A $n$mal so klein, so nahe, so langsam ist als B, so ist A auch $\frac{1}{n}$mal (den $n$ten Theil) so groß, so fern, so geschwind als B.

8. I. Wenn bei unverändertem Zähler der Nenner des Bruches unendlich groß wird (∞ nach Wallis u. A.) d. h. jede beliebige Zahl übersteigt, so wird der Bruch kleiner als jede beliebige Zahl und verschwindet, indem er die Grenze (limes) 0 erreicht. Dieser Satz wird geschrieben:

$$\lim \frac{a}{b} = 0,\ b = \infty$$

II. Wenn bei unverändertem Zähler der Nenner des Bruches verschwindet, d. h. durch fortgesetzte Abnahme Null wird, so wird der Bruch unendlich:

$$\lim \frac{a}{b} = \infty,\ b = 0.$$

Denn Division durch einen echten Bruch ist Multiplication mit einem unechten Bruche (6).

III. Wenn Zähler und Nenner eines Bruches zugleich verschwinden oder unendlich werden, und wenn von den Factoren eines Products der eine verschwindet, während der andere unendlich wird, so wird der Bruch und das Product im Allgemeinen unbestimmt. Denn es giebt unbestimmt viel verschiedene Werthe, welche mit einem verschwindenden Factor multiplicirt verschwinden; und die Multiplication mit einer ohne Ende wachsenden Zahl ist gleichbedeutend mit der Division durch eine verschwindende Zahl. Wenn aber der Zähler und der Nenner des Bruches

oder die Factoren des Products ihre besonderen Werthe dadurch erhalten, daß einem in ihnen vorkommenden Buchstaben ein besonderer Werth beigelegt wird, so läßt sich in jedem gegebenen Falle die Grenze angeben, welche der Bruch oder das Product erreicht, z. B.

$$\lim \frac{a^2 - b^2}{a - b} = 2a, \quad b = a$$

weil überhaupt $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

IV. Wenn bei unverändertem Dignanden der Exponent einer Potenz unendlich wird, so erreicht die Potenz die Grenze ∞ oder 0, je nachdem der Dignand mehr oder weniger als 1 ist.

Beweis. Nach §. 9, 5 hat man

$$a^n - 1 = (a^{n-1} + a^{n-2} + . . + a + 1)(a - 1).$$

Unter der Voraussetzung $a > 1$ ist $a^2 > 1$, u. s. f., daher

$$a^{n-1} + a^{n-2} + . . + a + 1 > n$$

$$a^n > 1 + n(a - 1).$$

Wenn nun n unendlich wird, so übersteigt $n(a - 1)$ jede beliebige Zahl, also auch a^n, d. h.

$$\lim a^n = \infty, \; n = \infty.$$

Unter der Voraussetzung $a < 1$ ist $\frac{1}{a} > 1$, folglich

$$\lim \left(\frac{1}{a}\right)^n = \infty, \; n = \infty.$$

Nach (5) ist $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$. Dieser Bruch wird unendlich, wenn sein Nenner verschwindet (II), folglich erhält man für $a < 1$

$$\lim a^n = 0, \; n = \infty.$$

V. Wenn bei abnehmendem Dignanden der Exponent einer Potenz unendlich wird, und wenn der Dignand und der Exponent ihre besonderen Werthe dadurch erhalten, daß einem in ihnen vorkommenden Buchstaben ein besonderer Werth beigelegt wird, so kann die Potenz auch eine andere Grenze als ∞ oder 0 erreichen, welche in jedem gegebenen Falle sich berechnen läßt.

§. 12. Quotient von Polynomien.

(Heis §§. 19. 25. 26).

1. Um ein Polynomium zu dividiren, hat man seine einzelnen Glieder zu dividiren:

$$\frac{a - b + c}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}.$$

Beweis. Wenn man $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$ mit dem Divisor d multiplicirt (§. 9, 1), so erhält man $\frac{a}{d}d - \frac{b}{d}d + \frac{c}{d}d = a - b + c$, den Dividenden.

Anmerkung. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$,

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c},$$

wie man durch Multiplication des Quotienten mit dem Divisor nach (§. 9, 3) beweisen kann.

Die Grenze, welche $\frac{ab}{a+b}$ erreicht, wenn b unendlich wird, ergiebt sich, nachdem man den Zähler und den Nenner durch b dividirt hat. Nach §. 11, 2 ist

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{a}{\frac{a}{b}+1}.$$

Wenn nun b unendlich wird, so verschwindet $\frac{a}{b}$ (§. 11, 8), daher

$$\lim \frac{ab}{a+b} = a, \quad b = \infty.$$

Ebenso findet man

$$\lim \frac{a + bx + cx^2}{f + gx + hx^2} = \frac{c}{h}, \quad x = \infty$$

nachdem man den Zähler und den Nenner des gegebenen Bruches durch x^2 dividirt hat.

2. Umgekehrt: Brüche von einerlei Nenner lassen sich in einen Bruch desselben Nenners vereinigen, dessen Zähler ein Polynomium ist, bestehend aus den einzelnen Zählern mit dem Zeichen der Brüche oder mit den entgegengesetzten Zeichen, je nachdem der zu bildende Bruch das Zeichen + oder — hat.

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a-b+c}{d} = -\frac{-a+b-c}{d}.$$

Die gemischte Zahl $a + \frac{b}{c}$ läßt sich in den Bruch $\frac{ac+b}{c}$ einrichten, nachdem man $\frac{ac}{c}$ für a gesetzt hat.

3. Brüche von verschiedenen Nennern lassen sich vereinigen, nachdem man ihnen nach §. 11, 2 einen gemeinschaftlichen Nenner (Gene-

ralnenner) gegeben hat. Wenn die einzelnen Nenner gemeinschaftliche Factoren nicht haben, so ist ihr Product der kleinste unter den möglichen Generalnennern. Sind z. B. p, q, r die einzelnen Nenner, so ist pqr der Generalnenner, welchen die Brüche annehmen, indem man ihre Zähler und Nenner der Reihe nach mit qr, pr, pq multiplicirt. Wenn in mehrern Nennern derselbe Factor oder Potenzen desselben vorkommen, so hat man in das zu bildende Product von diesem Factor nur die höchste Potenz aufzunehmen, welche in den einzelnen Nennern anzutreffen ist. Sind z. B. p^2q, q^2r, pr^2 die einzelnen Nenner, so ist $p^2q^2r^2$ der Generalnenner, welchen die Brüche erhalten, indem man ihre Zähler und Nenner der Reihe nach mit qr^2, p^2r, pq^2 multiplicirt.

Anm. Um Brüche von verschiedenen Nennern zu vergleichen, bilde man ihre Differenz oder ihren Quotienten. Wenn die Differenz des ersten und zweiten Bruches positiv, oder der Quotient des ersten und zweiten Bruches unecht ist, so ist der erste Bruch größer als der zweite, z. B.

$$\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{(a+m)b - (b+m)a}{(b+m)b} = \frac{(b-a)m}{(b+m)b}.$$

$$\frac{a+m}{b+m} : \frac{a}{b} = \frac{ab+bm}{ab+am}.$$

Jene Differenz ist positiv und dieser Quotient unecht, wenn $a < b$ und m positiv ist; folglich ist

$$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}, \text{ wenn } a < b \text{ und } m \text{ positiv ist.}$$

4. Um durch ein Polynomium zu dividiren, kann man nicht durch die einzelnen Glieder desselben dividiren. Der Quotient würde mit dem vollständigen Divisor multiplicirt ein Product geben, welches von dem Dividenden verschieden ist.

Eine theilweise Division (Partialdivision) wird ermöglicht*), wenn man den Dividenden und den Divisor nach der Reihe der in ihren Gliedern vorkommenden Potenzen desselben Buchstabens ordnet, entweder beide nach den fallenden Potenzen des Buchstabens, so daß die Glieder voranstehen, welche die höchsten Potenzen enthalten, oder beide nach den steigenden Potenzen des Buchstabens. Das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisor dividirt giebt dann das erste Glied des Quotienten, dessen Product mit dem vollständigen Divisor von dem vollständigen Dividenden subtrahirt eine Differenz giebt,

---

*) Die Einführung derselben trifft mit der Erfindung der Buchstabenrechnung zusammen. Die von den Arabern ausgebildete Division einer mehrstelligen Decimalzahl durch eine andere diente zum Vorbild.

welche ein Rest heißt. Das erste Glied dieses Restes durch das erste Glied des Divisor dividirt giebt das zweite Glied des Quotienten, dessen Product mit dem vollständigen Divisor von dem Reste subtrahirt einen neuen Rest giebt, der wie der vorige Rest behandelt wird.

Wenn man zu dem Reste 0 gelangt, so ist der Quotient vollständig gefunden und man sagt, daß die Division aufgeht; denn das Product des vollständigen Divisor mit allen Gliedern des Quotienten wurde vom Dividenden nach und nach subtrahirt, wobei die Differenz 0 sich ergeben hat.

Wenn die Division nicht aufgeht, so wird sie nach Entwickelung einer hinreichenden Anzahl von Gliedern des Quotienten abgebrochen, und man erhält als vollständigen Quotienten eine gemischte Zahl, indem man den Quotienten des zuletzt behaltenen Restes durch den vollständigen Divisor als Bruch den gefundenen Gliedern des Quotienten hinzufügt.

Beweis. Wenn A den Dividenden, B den Divisor, C die gefundenen Glieder des Quotienten, R den zuletzt behaltenen Rest bedeutet, so ist $R = A - BC$, und $A = BC + R$, folglich (1)

$$\frac{A}{B} = C + \frac{R}{B}.$$

Beispiel. Um $12x^2 + 54y^2 + 48yz - 51xy - 24xz$ durch $4x - 9y - 8z$ zu dividiren, ordnet man den Dividenden und Divisor beide nach den fallenden Potenzen eines Buchstabens z. B. x wie folgt:

$$\begin{array}{l}
12x^2 - 51xy - 24xz + 54y^2 + 48yz : 4x - 9y - 8z \\
12x^2 - 27xy - 24xz \qquad\qquad\qquad = 3x - 6y \\
\hline
\quad - 24xy \qquad\quad + 54y^2 + 48yz \\
\quad - 24xy \qquad\quad + 54y^2 + 48yz \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Das erste Glied des Quotienten findet man aus $12x^2 : 4x$, den ersten Rest durch Subtraction des Products $3x(4x - 9y - 8z)$ vom Dividenden; das zweite Glied des Quotienten aus $-24xy : 4x$, den zweiten Rest durch Subtraction des Products $-6y(4x - 9y - 8z)$ vom Dividenden. Dieser Rest ist 0, also geht die Division auf und der vollständige Quotient ist $3x - 6y$.

Bei den nicht aufgehenden Divisionen durch

$$a + bx, \quad a + bx + cx^2, \quad a + bx + cx^2 + dx^3, \ldots$$

erhält man unendliche Reihen von Gliedern mit steigenden Potenzen von x. Jedes Glied einer solchen Reihe kann in dem ersten Falle aus dem vorhergehenden Gliede, in den andern Fällen aus den 2, 3, . . vorhergehenden Gliedern nach einem von der Stelle des Gliedes unabhängigen Gesetz berechnet werden. Deshalb heißen solche Reihen recurrente (nach Moivre Miscell. analyt. 1730). Und wenn eine Reihe recurrent ist, so läßt sich der Bruch angeben, aus dem sie hervorgeht. Vergl. Euler Introd. I. Klügel math. W. 4 p. 324. Cauchy Anal. algébr. c. 12.

5. Bemerkenswerth ist die aufgehende Division (§. 9, 5)

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \,.\,.$$
$$+ a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

und die nicht aufgehende Division

$$\frac{a^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \,.\,.\, + ab^{n-2} + b^{n-1} + \frac{b^n}{a - b}$$

welche aus der vorigen folgt, weil (1)

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a^n}{a - b} - \frac{b^n}{a - b}.$$

Indem man b mit $-b$ vertauscht, erhält man für die Quotienten $\frac{a^n - (-b)^n}{a + b}$, $\frac{a^n}{a + b}$ Reihen von Gliedern mit abwechselnden Zeichen. Die Summe $a + b$ geht entweder in $a^n - b^n$ oder in $a^n + b^n$ auf. Wenn $a = 1$ ist, so findet man*)

$$\frac{1 - b^n}{1 - b} = \frac{b^n - 1}{b - 1} = 1 + b + b^2 + \,.\,.\, + b^{n-1}$$

$$\frac{1}{1 - b} = 1 + b + b^2 + \,.\,.\, + b^{n-1} + \frac{b^n}{1 - b}.$$

Insbesondere, wenn $b < 1$ und n unendlich wächst, so verschwindet b^n und $\frac{b^n}{1 - b}$ (§. 11, 8), folglich ist unter dieser Voraussetzung

$$\frac{1}{1 - b} = 1 + b + b^2 + b^3 + \,.\,.\,.$$

die Summe einer Reihe von unendlich vielen Gliedern.

Die Quotienten

$$\frac{x^{12}y^7 - x^7y^{12}}{x - y}, \quad \frac{c}{a - x}, \quad \frac{c}{a^2 - ax + x^2}, \quad \frac{1 + x}{1 + y}$$

lassen sich aus den gefundenen Quotienten ableiten, weil

$$\frac{x^{12}y^7 - x^7y^{12}}{x - y} = x^7y^7\frac{x^5 - y^5}{x - y}$$
$$= x^7y^7(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$
$$= x^{11}y^7 + x^{10}y^8 + x^9y^9 + x^8y^{10} + x^7y^{11}$$

$$\frac{c}{a - x} = \frac{c}{a}\,\frac{1}{1 - \frac{x}{a}}$$

$$\frac{c}{a^2 - a\,x + x^2} = \frac{c(a + x)}{a^3 + x^3} = \frac{c}{a^3}\,(a + x)\,\frac{1}{1 + \frac{x^3}{a^3}}$$

*) Im Alterthum aus Eucl. Elem. 9, 35 bekannt.

$$\frac{1+x}{1+y} = 1 + \frac{x-y}{1+y} = 1 + x - y - (x-y)y + \ldots$$

6. Aus der Gleichung

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$$

schließt man unter der Voraussetzung $a > b$ wie §. 11, 8, daß

$$(n+1)b^n < \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} < (n+1)a^n.$$

Daher findet man, indem man $a = b + 1$ setzt,

$$(n+1) \cdot 1^n < 2^{n+1} - 1^{n+1}$$
$$(n+1) \cdot 2^n < 3^{n+1} - 2^{n+1}$$
$$(n+1) \cdot 3^n < 4^{n+1} - 3^{n+1}$$

u. s. w. folglich durch Addition

$$(n+1)(1^n + 2^n + \ldots + k^n) < (k+1)^{n+1} - 1.$$

Ebenso erhält man auch

$$1^{n+1} - 0^{n+1} < (n+1) \cdot 1^n$$
$$2^{n+1} - 1^{n+1} < (n+1) \cdot 2^n$$
$$3^{n+1} - 2^{n+1} < (n+1) \cdot 3^n$$

u. s. w., folglich durch Addition

$$k^{n+1} < (n+1)(1^n + 2^n + \ldots + k^n).$$

Die gefundene Begrenzung

$$k^{n+1} < (n+1)(1^n + 2^n + \ldots + k^n) < (k+1)^{n+1} - 1$$

giebt zu erkennen, daß

$$(n+1)(1^n + 2^n + \ldots + k^n) - k^{n+1} < (k+1)^{n+1} - k^{n+1} - 1$$

und nach Division durch $(n+1)k^{n+1}$, daß

$$\frac{1^n + 2^n + \ldots + k^n}{k^{n+1}} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{n+1} - 1 - \frac{1}{k^{n+1}} \right\}$$

Wenn k unendlich wird, so verschwindet die rechte Seite; also verschwindet auch die linke Seite und man hat*)

$$\lim \frac{1^n + 2^n + \ldots + k^n}{k^{n+1}} = \frac{1}{n+1}, \quad k = \infty.$$

---

*) Diesen Satz, dessen Anfänge bei Archimedes (Spiralen 10) zu finden sind, und dessen Aufstellung der erste Schritt zur Integralrechnung war, haben die Mathematiker der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts entwickelt. Fermat und Roberval Brief von 1636 Oct. 11 (Fermat opp. p. 140), Pascal oeuvres éd. Lahure II p. 482, Wallis Arithm. infin. 1656. Vergl. Stereom. §. 9.

§. 13. Theilbarkeit der Zahlen.*)

(Heis §. 27 und 28).

1. Wenn der Quotient der (ganzen) Zahlen a und m eine ganze Zahl ist, wenn also die Division von a durch m aufgeht, so sagt man, a ist theilbar durch m, m geht auf in a, a ist ein Dividuus (Multiplum, Vielfaches) von m, m ist ein Divisor (Theiler, Maß) von a. Alle Zahlen von der Form mx, welche die Formel mx umfaßt, wenn für die Unbestimmte (indeterminata) x beliebige ganze Zahlen gesetzt werden, sind durch m theilbar. Die durch 2 theilbaren Zahlen von der Form $2x$ heißen gerade (pares). Die durch 2 nicht theilbaren Zahlen $2x + 1$ heißen ungerade (impares). Eucl. VII. def. 5 ff.

Wenn a durch m theilbar, und m durch p theilbar ist, so ist auch a durch p theilbar. Denn, nach Voraussetzung ist $a = mx$, $m = py$, folglich $a = pxy$. Und wenn a durch m theilbar und z eine beliebige Zahl ist, so ist auch das Product az durch m theilbar.

2. Wenn a und b durch m theilbar, x und y beliebige Zahlen sind, so ist $ax \pm by$ durch m theilbar (Eucl. V, 1). Denn nach der Voraussetzung ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, folglich $ax \pm by = m(\alpha x \pm \beta y)$.

Wenn von den Differenzen $a - b$ und $c - d$ jede durch m theilbar ist, so sind auch

$$a \pm c - (b \pm d), \quad ac - bd, \quad a^2 - b^2, \quad a^3 - b^3, \ldots$$

durch m theilbar. Denn

$$a \pm c - (b \pm d) = (a - b) \pm (c - d)$$
$$ac - bd = (a - b)c + b(c - d)$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \text{ u. s. f.}$$

3. Wenn die Zahl a durch die Zahl b dividirt den Rest c giebt, wenn wiederum b durch c dividirt den Rest d giebt, u. s. f., so bleibt endlich der Rest 0, weil die (ganzen) Zahlen $b, c, d, \ldots$ eine fallende Reihe bilden, und man hat die Kette von Gleichungen (§. 10, 3)

$$a = pb + c$$
$$b = qc + d$$
$$\cdots\cdots$$
$$f = tg + h$$
$$g = uh.$$

*) In diesem der Arithmetik im engeren Sinne (Zahlenlehre) angehörigen Paragraphen wird unter Zahl immer eine ganze Zahl verstanden.

Der letzte von 0 verschiedene Rest h der gefundenen Reihe ist der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen a und b. Denn h ist ein Divisor von g, also auch (2) von $tg + h$ d. i. f, also auch von jedem vorangehenden Rest, sowie endlich von b und a. Umgekehrt schließt man, daß ein Divisor von a und b auch ein Divisor von c, d, . . , h ist, und daher nicht mehr als h sein kann.

Wenn zwei Zahlen einen gemeinschaftlichen Divisor über 1 nicht haben, so heißen sie prim zu einander (primi inter se, relative Primzahlen). Wenn h der größte gemeinschaftliche Divisor von a und b ist, so sind die Zahlen $a : h$ und $b : h$ prim zu einander. Insbesondere sind je zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen, a und $a + 1$, relative Primzahlen. Eucl. VII, 1.

Anmerkung. Wenn der Zähler und der Nenner eines Bruches nicht prim zu einander sind, so ist der Bruch reductibel und erhält seinen einfachsten Ausdruck, indem der Zähler und der Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Divisor dividirt werden (§. 11, 2). Wenn der Zähler und der Nenner relative Primzahlen sind, so ist der Bruch irreductibel.

Um den größten gemeinschaftlichen Divisor mehrerer Zahlen a, b, c, . . zu finden, berechnet man den größten gemeinschaftlichen Divisor h von a und b, den größten gemeinschaftlichen Divisor h' von h und c, u. s. w. Jede Zahl, welche in a, b einzeln aufgeht, ist ein Divisor von h; jede Zahl, welche in a, b, c einzeln aufgeht, ist ein gemeinschaftlicher Divisor von h und c, also ein Divisor von h', u. s. w.

4. Wenn a und b prim zu einander sind, so geht jeder gemeinschaftliche Divisor von ak und b in k auf, und wenn zugleich ak durch b theilbar ist, so ist k durch b theilbar.

Beweis. Unter der Voraussetzung, daß a prim zu b ist, wird in der Kette von Gleichungen (3) der letzte Rest $h = 1$, folglich

$$ak = pbk + ck$$
$$bk = qck + dk$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$fk = tgk + k.$$

Hieraus schließt man (2), daß ein gemeinschaftlicher Divisor von ak und b in ck, dk, . . , k aufgeht. Ebenso schließt man, wenn ak durch b theilbar ist, daß b in ck, dk, . . , k aufgeht.

5. Die gemeinschaftlichen Dividuen von a und b d. h. die Zahlen, welche sowohl durch a als auch durch b theilbar sind, sind von der Form $a\frac{b}{h}x$, wenn durch h der größte gemeinschaftliche Divisor von

a und b bezeichnet wird. Ist nämlich $a = h\alpha$, $b = h\beta$, und ak durch b theilbar, so ist auch αk durch β theilbar; nun ist α prim zu β (3), folglich k durch β theilbar (4), d. h. $k = \beta x$, $ak = a\beta x$.

Die gemeinschaftlichen Dividuen von a, b, c sind von der Form $a\,\frac{b}{h}\,\frac{c}{h}\,x$, wenn durch h' der größte gemeinschaftliche Divisor von $a\,\frac{b}{h}$ und c bezeichnet wird. U. s. w.

Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von a und b ist darnach $a\,\frac{b}{h}$, der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von a, b, c ist $a\,\frac{b}{h}\,\frac{c}{h'}$, u. s. w. Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der relativen Primzahlen a und b ist ab. Und wenn eine Zahl durch die relativen Primzahlen a und b theilbar ist, so ist sie durch das Product derselben theilbar. Eucl. VII, 36 ff.

6. Umgekehrt schließt man: wenn a und k einzeln prim zu b sind, so ist auch das Product ak prim zu b. Denn ein gemeinschaftlicher Divisor von ak und b würde in k aufgehen (4), also wäre k nicht prim zu b gegen die Voraussetzung. Eucl. VII, 26 ff.

Potenzen relativer Primzahlen sind relative Primzahlen. Wenn a prim zu b, so ist aa prim zu b, und a prim zu bb. Ebenso schließt man, daß a^2 prim zu b^2, b^3, u. s. w.

7. Eine Zahl, welche durch andere Zahlen außer 1 nicht theilbar ist, heißt eine Primzahl (numerus primus). Jede Zahl ist entweder eine Primzahl oder durch Primzahlen theilbar. Eucl. VII, 34.

Beweis. Wenn a keine Primzahl, sondern durch b theilbar ist, so ist b entweder eine Primzahl, oder durch c theilbar, ferner c entweder eine Primzahl oder durch d theilbar, u. s. f. Die Zahlen b, c, d, . . bilden eine fallende Reihe, welche deshalb nur eine endliche Anzahl von Gliedern haben kann und mit einer Primzahl schließt, durch welche jede der vorangehenden Zahlen, also auch a theilbar ist (1).

Anmerkung. Es ist zweckmäßig, die Zahl 1 nicht zu den Primzahlen zu rechnen. Dann sind je zwei Primzahlen ohne Ausnahme prim zu einander. Die einzige gerade Primzahl ist 2. Wenn die Zahl a zwischen r^2 und $(r+1)^2$ liegt, und durch die Primzahlen, welche kleiner als r sind, nicht theilbar ist, so ist sie eine Primzahl. Gesetzt a wäre durch die Primzahl $r+s$ theilbar, so wäre $a = (r+s)x$ durch x theilbar. Nun ist

$$x = \frac{a}{r+s} < \frac{(r+1)^2}{r+s} < r + 1,$$

d. h. entweder eine Primzahl, die r nicht übersteigt, oder durch eine solche theilbar. Also wäre a durch eine Primzahl unter r theilbar, gegen die Voraussetzung; folglich kann a durch eine Primzahl über r nicht theilbar sein.

8. Die natürliche Zahlenreihe enthält unendlich viel Primzahlen. Eucl. IX, 20.

Beweis. Bedeutet p die höchste bekannte Primzahl, A das Product der bekannten Primzahlen 2, 3, 5, 7, . . , p, so ist $A + 1$ entweder eine Primzahl über p oder durch eine Primzahl über p theilbar. Denn A ist durch jede der Primzahlen von 2 bis p theilbar; $A + 1$ ist prim zu A (3), mithin durch keine der Primzahlen von 2 bis p theilbar. Wenn nun $A + 1$ eine Primzahl nicht ist, so ist sie durch eine Primzahl theilbar, welche p übersteigt. Demnach ist keine gegebene Primzahl die letzte Primzahl in der Reihe der natürlichen Zahlen.

Anmerkung. Für die Aufeinanderfolge der Primzahlen ist ein allgemeines Gesetz nicht bekannt. Es giebt kein aus Potenzen einer Unbestimmten gebildetes Polynomium, das nur Primzahlen umfaßte. Wenn z. B. $a + bx + cx^2$ für $x = m$ eine Primzahl p ergiebt, so hat für $x = m + py$ dieselbe Formel den Werth

$$\begin{aligned} & a + b(m + py) + c(m + py)^2 \\ = {} & a + bm + cm^2 + bpy + 2cmpy + cp^2y^2 \\ = {} & p + (b + 2cm)py + cp^2y^2, \end{aligned}$$

der durch p theilbar, also keine Primzahl ist (Legendre Théorie des nombres Introd. 20).

9. Eine Zahl, welche durch andere Zahlen außer 1 theilbar ist, kann als Product von bestimmten Primzahlen (einfachen Factoren) dargestellt werden und heißt zusammengesetzt aus diesen Primzahlen. Die allgemeine Formel einer aus den Primzahlen a, b, c, . . zusammengesetzten Zahl ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ . . .

Eine aus den Primzahlen a, b, c, . . . zusammengesetzte Zahl ist durch eine andere Primzahl p nicht theilbar, mithin aus andern Primzahlen nicht zusammensetzbar. Denn jede der Zahlen a, b, c, . . ist prim zu p, folglich ist auch das Product $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ . . prim zu p (6).

10. Wenn die Zusammensetzung gegebener Zahlen aus Primzahlen bekannt ist, so läßt sich ohne Weiteres erkennen, ob eine der Zahlen durch eine andere theilbar ist, welches ihr kleinster gemeinschaftlicher Dividuus ist, welches ihr größter gemeinschaftlicher Divisor ist, ob dieselben Potenzen sind.

Die Zahl N ist durch N_1 theilbar, wenn N_1 weder andere einfache Factoren, noch einen derselben in größerer Anzahl hat als N. Wenn nämlich ab durch $a_1 b_1$ theilbar ist, während a_1 in a aufgeht und b_1 prim zu a ist, so ist b durch b_1 theilbar. Denn es sei $a = a_1 c$, also ist auch cb durch b_1 theilbar und b_1 prim zu c, folglich geht b_1 in b auf (4). Z. B. $360 = 2^3.3^2.5$ ist durch $24 = 2^3.3$ theilbar, nicht durch $48 = 2^4.3$, nicht durch $63 = 3^2.7$. Ein irreductibler Bruch kann nur dann in einen endlichen Decimalbruch verwandelt werden, wenn sein Nenner von der Form $2^\alpha.5^\beta$ ist.

Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von N, N_1, N_2, . . wird gefunden, indem man jedem von den einfachen Factoren dieser Zahlen unter den Exponenten, die er in N, N_1, N_2, . . hat, den größten giebt und das Product dieser Potenzen bildet. Z. B. $3.5.7$, $2^3.7$, 2.3^2, $2^3.3$ haben den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus $2^3.3^2.5.7$.

Der größte gemeinschaftliche Divisor von N, N_1, N_2, . . wird gefunden, indem man die einfachen Factoren auswählt, welche N, N_1, N_2, . . gemein haben, jedem derselben unter den Exponenten, die er in N, N_1, N_2, . . hat, den kleinsten giebt und das Product dieser Potenzen bildet. Z. B. $2^2.3^4.5$ und $2^5.3^3.7$ haben den größten gemeinschaftlichen Divisor $2^2.3^3$.

Wenn a, b, c Primzahlen bedeuten, und $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ die $m$te Potenz einer Zahl k ist, so sind α, β, γ durch m theilbar. Giebt es z. B. α_1 Factoren a in der Zahl k, so enthält k^m deren $\alpha_1 m$, d. h. eine durch m theilbare Anzahl, u. s. f.

Wenn f, g, h relative Primzahlen bedeuten, und fgh eine $m$te Potenz ist, so sind f, g, h ebenfalls $m$te Potenzen. Denn ein einfacher Factor kann in fgh nicht einen andern Exponenten haben, als in einer der Zahlen f, g, h, welche prim zu einander sind.

11. Wenn von einer Zahl ihre Zusammensetzung aus Primzahlen bekannt ist, so lassen sich ohne Weiteres alle Divisoren der Zahl angeben. Bedeuten a, b, c, . . Primzahlen, so ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ durch alle Glieder des Products

$$(1+a+a^2+..+a^\alpha)(1+a+b^2+..b^\beta)(1+c+c^2+..+c^\gamma)$$

und nur durch solche theilbar. Denn die Glieder dieses Products sind in der Formel $a^r b^s c^t$ enthalten, wobei r, s, t der Reihe nach die Zahlen α, β, γ nicht übersteigen; also ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ durch $a^r b^s c^t$ theilbar (10).

Die Anzahl aller Divisoren der Zahl $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ist

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma),$$

weil das erste Polynomium $1 + \alpha$, das 2te $1 + \beta$, das 3te $1 + \gamma$

Glieder hat. Hierbei sind 1 und $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ (die Zahl selbst) als Divisoren der Zahl mitgezählt.

Die Summe aller Divisoren der Zahl ist das Product, durch dessen Entwicklung die Divisoren der Zahl gefunden werden, mithin (§. 11, 5)

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}.$$

Z. B. $360 = 2^3 . 3^2 . 5$ hat 4 . 3 . 2 d. i. 24 Divisoren, nämlich

1, 2, 4, 8; 3, 6, 12, 24; 9, 18, 36, 72;

5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Die Summe derselben ist 15 . 13 . 6 = 1170.

Anmerkung. Eine Zahl ist vollkommen (τελειός, perfectus) genannt worden, wenn sie der Summe ihrer Divisoren (die Zahl selbst ausgeschlossen) gleich ist. Die zur Zeit bekannten vollkommenen Zahlen sind in der Formel $(2^x - 1) . 2^{x-1}$ enthalten, unter der Bedingung, daß $2^x - 1$ eine Primzahl ist*). Z. B. $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ sind Primzahlen, so daß

$$3 . 2 = 6 = 1 + 2 + 3$$
$$7 . 4 = 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$
$$31 . 16 = 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Wenn nämlich $2^x - 1$ eine Primzahl ist, so ist die Summe aller Divisoren von $(2^x - 1) . 2^{x-1}$ mit Einschluß der Zahl selbst

$$(1 + 2^x - 1)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{x-1})$$
$$= 2^x(2^x - 1) = 2(2^x - 1) . 2^{x-1},$$

also nach Ausschluß der Zahl $(2^x - 1) . 2^{x-1}$ gleich derselben Zahl.

Zwei Zahlen sind amicabel genannt worden, wenn jede der Summe der Divisoren der andern (die Zahl selbst ausgeschlossen) gleich ist z. B. 220 und 284.

12. Wenn $p, q, r, \ldots$ die Primzahlen bedeuten, durch welche das Product $ABC\ldots$ theilbar ist, wenn unter den Zahlen $A', B', C', \ldots$ durch $p, p^2, \ldots, q, q^2, \ldots, r, r^2, \ldots, \ldots$ mindestens ebensoviele theilbar sind, als unter den Zahlen $A, B, C, \ldots$, so ist das Product $A'B'C'\ldots$ durch das Product $ABC\ldots$ theilbar.**)

Z. B. unter den Zahlen 3, 4, 5, 6, 9 sind 2 durch 2, 1 durch 2^2, 3 durch 3, 1 durch 3^2, 1 durch 5 theilbar.

---

*) Eucl. VII, def. 22. IX, 36. Vergl. Klügel math. W. V p. 887. Terquem Nouv. Ann. III. Ueber die amicablen Zahlen findet man Näheres bei Klügel math. W. I p. 246, V p. 55.

**) Die in (12) und (13) enthaltenen Sätze sind von Gauß (Disq. arithm. 126. 127. 41).

Unter den Zahlen 12, 18, 45 sind 2 durch 2, 1 durch 2^2, 3 durch 3, 2 durch 3^2, und 1 durch 5 theilbar.

Da die letztern Anzahlen der Reihe nach nicht geringer sind, als die erstern, so ist 12 . 18 . 45 durch 3 . 4 . 5 . 6 . 9 theilbar.

Beweis. Unter den Zahlen A, B, C. . . seien α durch p theilbare, β durch p^2 theilbare, γ durch p^3 theilbare, u. s. f. Dann ist das Product ABC . . zunächst durch p^α theilbar, der gefundene Quotient ist wiederum durch p^β theilbar, der neue Quotient durch p^γ, u. s. w. Das Product ABC. . enthält also $\alpha + \beta + \gamma +$. . Factoren p. Von gleicher Bedeutung seien die Anzahlen α', β', γ', . . für die Zahlen A', B', C', . . . Nun sind nach der Voraussetzung α', β', γ', der Reihe nach nicht geringer als α, β, γ, . . , also ist $\alpha' + \beta' + \gamma' +$ . . nicht geringer als $\alpha + \beta + \gamma +$ . . , d. h. $A'B'C'$ . . enthält nicht weniger Factoren p als ABC . . . Aus denselben Gründen enthält $A'B'C'$ . . nicht weniger Factoren q, r, . . als ABC . . . Daher ist $A'B'C'$ . . durch ABC . . theilbar (10).

13. Wenn eine beliebige Zahl der Reihe 1, 2, 3, . . , m durch k, und die ganze Zahl des Quotienten $m : k$ durch m' bezeichnet wird, so sind m' Zahlen der Reihe durch k theilbar, nämlich k, $2k$, . . , $m'k$. Wenn ferner die ganze Zahl des Quotienten $m' : k$ durch m'' bezeichnet wird, so sind m'' Zahlen der Reihe 1, 2, . . , m' durch k theilbar, mithin sind m'' Zahlen der gegebenen Reihe durch k^2 theilbar. U. s. w.

In der Reihe von ebensoviel folgenden Zahlen $a + 1$, $a + 2$, . . , $a + m$ giebt es mindestens m', höchstens $m' + 1$ durch k theilbare Zahlen. Die kleinste durch k theilbare Zahl der Reihe, welche durch $a + c$ bezeichnet wird, kann $a + k$ nicht übersteigen. Also enthält die Reihe die durch k theilbaren Zahlen

$$a + c,\quad a + c + k, \ldots,\quad a + c + (m' - 1)k$$

und außerdem $a + c + m'k$, wenn c klein genug ist.

Das Product $(a + 1)(a + 2)$ . . $(a + m)$ ist durch das Product 1 . 2 . . . m theilbar. Wenn nämlich das zweite Product aus den Primzahlen p, q, r, . . zusammengesetzt ist, so sind unter den Zahlen $a + 1$, $a + 2$, . . , $a + m$ mindestens ebensoviele durch p, p^2, . . , q, q^2, . . , r, r^2, . . theilbar, als unter den Zahlen 1, 2, . . , m, folglich u. s. w. (12). Der Quotient des ersten Products durch das zweite ist eine figurirte Zahl (§. 28), mithin eine Summe von ganzen Zahlen, also auch aus diesem Grunde eine ganze Zahl.

Wenn $m = a + b + c +$. . , so ist 1 . 2 . 3 . . . m durch das Product

$$1 . 2 \ldots a . 1 . 2 \ldots b . 1 . 2 \ldots c \ldots$$

theilbar, weil 1 . 2 . . . a durch 1 . 2 . . . a, $(a + 1)$ . . $(a + b)$ durch 1 . 2 . . . b, $(a + b + 1)$ . . $(a + b + c)$ durch 1 . 2 . . . c,

u. s. f. theilbar ist. Der Quotient ist durch m theilbar in dem Falle, daß m eine Primzahl ist. Der Quotient ist die Anzahl von Permutationen gewisser Elemente (§. 25, 4) und auch aus diesem Grunde eine ganze Zahl.

14. Wenn die Zahl m die Divisoren $a, b, c, ..$ hat, welche prim zu einander sind (jeder zu jedem der übrigen), so giebt es in der Reihe $1, 2, 3, .., m$

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)..$$

Zahlen, die durch $a, b, c, ..$ nicht theilbar sind*).

Beweis. In der gegebenen Reihe giebt es $\frac{m}{a}$ Zahlen, welche durch a theilbar sind, nämlich $a, 2a, 3a, ..., \frac{m}{a}a$, folglich bleiben

$$m-\frac{m}{a}=m\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

Zahlen übrig, welche durch a nicht theilbar sind.

Unter den durch a nicht theilbaren Zahlen der gegebenen Reihe hat man diejenigen noch auszuscheiden, welche durch b theilbar sind. Es giebt aber in der Reihe

$$b,\ 2b,\ 3b,\ ..\ \frac{m}{b}b$$

ebensoviel durch a nicht theilbare Zahlen, als in der Reihe

$$1, 2, 3, ..., \frac{m}{b}.$$

Denn b ist prim zu a, folglich kb durch a theilbar oder nicht theilbar, je nachdem k durch a theilbar ist oder nicht theilbar (4). Die letztere Reihe enthält nach dem Obigen $\frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$ Zahlen, welche durch a nicht theilbar sind. Nach Ausscheidung derselben bleiben von der gegebenen Reihe

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

Zahlen übrig, welche durch a, b nicht theilbar sind.

Unter den durch a, b nicht theilbaren Zahlen der gegebenen Reihe sind ferner nur noch diejenigen auszuscheiden, welche durch c theilbar sind, und deren es ebensoviel giebt, als es in der Reihe $c, 2c, 3c, .., \frac{m}{c}c$ Zahlen giebt, die durch a, b nicht theilbar sind, nämlich

*) Euler 1763 Nov. Comm. Petrop. 8 p. 74. Acta Petrop. 8 p. 17. Vergl. Gauß Disq. arithm. 38. Dirichlet Zahlentheorie von Dedekind §. 11 ff.

$\frac{m}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$. Nach Weglassung derselben bleiben von der gegebenen Reihe

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)-\frac{m}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

Zahlen übrig, die durch a, b, c nicht theilbar sind.

15. Wenn die sämmtlichen Primzahlen, aus welchen die Zahl m zusammengesetzt ist, durch $a, b, \ldots, h$ bezeichnet werden, so giebt es in der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{h}\right)$$

Zahlen, welche durch $a, b, \ldots, h$ nicht theilbar (14), mithin prim zu m sind. Diese Anzahl wird nach Gauß (a. a. O.) in der Arithmetik durch $\varphi(m)$ bezeichnet.

Z. B. $60 = 2^2 . 3 . 5$. In der Reihe $1, 2, \ldots, 60$ giebt es also

$$\varphi(60) = 60 . \frac{1}{2} . \frac{2}{3} . \frac{4}{5} = 16$$

Zahlen, welche prim zu 60 sind, nämlich

1	7	11	13	17	19	23	29
59	53	49	47	43	41	37	31

Wenn m und k relative Primzahlen sind, so sind auch m und $m-k$ relative Primzahlen.

Die Zahl 1 wird als prim zu sich selbst betrachtet, so daß $\varphi(1)=1$. Eine Primzahl p ist prim zu allen niederen Zahlen, also $\varphi(p)=p-1$. Wenn a, b, c Primzahlen bedeuten und $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ist, so findet man

$$\varphi(m) = a^{\alpha-1}\, b^{\beta-1}\, c^{\gamma-1}\, (a-1)(b-1)(c-1).$$

Wenn m durch μ ungerade Primzahlen theilbar ist, so ist $\varphi(m)$ durch 2^μ theilbar. Wenn m und n aus denselben Primzahlen zusammengesetzt sind, so kann das Verhältniß $\varphi(m):\varphi(n)$ durch Potenzen derselben Primzahlen ausgedrückt werden, z. B. $\varphi(360):\varphi(60) = 6$.

Wenn m und m' relative Primzahlen sind, so hat man

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots$$

$$\varphi(m') = m'\left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right)\cdots$$

$$\varphi(mm') = mm'\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right)\cdots$$

folglich $\varphi(mm') = \varphi(m)\,\varphi(m')$, z. B.

$$\varphi(36) = \varphi(4)\,\varphi(9) = 2 . 6 = 12.$$

16. Wenn δ ein Divisor von m ist, so giebt es $\varphi\left(\frac{m}{\delta}\right)$ Zahlen der Reihe 1, 2, 3, . . , m, für welche δ der größte Divisor ist, den sie mit m gemein haben. Denn unter den Zahlen von 1 bis m sind δ, 2δ, . . , $\frac{m}{\delta}\delta$ durch δ theilbar. Nun ist aber δ der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen $k\delta$ und $\frac{m}{\delta}\delta$ nur dann, wenn k prim zu $\frac{m}{\delta}$ ist. Also giebt es in der gegebenen Reihe ebensoviel Zahlen, welche mit m den größten gemeinschaftlichen Divisor δ haben, als es Zahlen der Reihe 1, 2, . . , $\frac{m}{\delta}$ giebt, welche prim zu $\frac{m}{\delta}$ sind, nämlich $\varphi\left(\frac{m}{\delta}\right)$ nach der angenommenen Bezeichnung (15).

Wenn alle Divisoren der Zahl m durch δ_1, δ_2, δ_3, . . bezeichnet werden, so ist*)

$$\varphi(\delta_1) + \varphi(\delta_2) + \varphi(\delta_3) + \ldots = m.$$

Diese Eigenschaft wird erkannt, indem man die Zahlen 1, 2, . . , m nach dem größten Divisor, welchen sie mit m gemein haben, gruppirt. In die Gruppe derjenigen Zahlen, welche mit m den größten gemeinschaftlichen Divisor δ_1 haben, gehören $\varphi\left(\frac{m}{\delta_1}\right)$ Zahlen; in die Gruppe derjenigen Zahlen, welche mit m den größten gemeinschaftlichen Divisor δ_2 haben, gehören $\varphi\left(\frac{m}{\delta_2}\right)$ Zahlen, u. s. w. Die Summe dieser Anzahlen $\varphi\left(\frac{m}{\delta_1}\right) + \varphi\left(\frac{m}{\delta_2}\right) + \ldots$ ist m, die Menge der vertheilten Zahlen. Die Reihe $\frac{m}{\delta_1}$, $\frac{m}{\delta_2}$, . . umfaßt aber alle Divisoren von m.

Diese Abzählung wird durch folgende Rechnung bestätigt. Es sei m aus den Primzahlen a, b, c zusammengesetzt und zwar $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Ein Divisor δ dieser Zahl ist von der Form $a^\lambda b^\mu c^\nu$, wenn λ eine Zahl der Reihe 0, 1, 2, . . , α bedeutet, μ eine Zahl der Reihe 0, 1, 2, . . , β und ν eine Zahl der Reihe 0, 1, 2, . . , γ. Nun ist (15)

$$\varphi(\delta) = \varphi(a^\lambda) \quad \varphi(b^\mu) \; \varphi(c^\nu).$$

Also stimmt die Summe aller Werthe von φ (δ), welche zu den einzelnen Werthen von λ, μ, ν gehören, mit dem Product der Reihen

$$\varphi(1) + \varphi(a) + \varphi(a^2) + \ldots + \varphi(a^\alpha)$$
$$\varphi(1) + \varphi(b) + \varphi(b^2) + \ldots + \varphi(b^\beta)$$
$$\varphi(1) + \varphi(c) + \varphi(c^2) + \ldots + \varphi(c^\gamma)$$

*) Gauß Disq. arithm. 39. Vergl. Dirichlet a. a. O.

überein. Die erste Reihe hat den Werth

$$1 + (a - 1) + a(a - 1) + . . + a^{\alpha-1}(a - 1)$$
$$= 1 + (a - 1)(1 + a + . . + a^{\alpha-1})$$
$$= 1 + (a^{\alpha} - 1) = a^{\alpha}.$$

Die zweite und dritte Reihe haben die Werthe b^{β} und c^{γ}. Daher ist die Summe aller Werthe von $\varphi(\delta)$ d. i. das Product der Reihen $= a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} = m$.

Beispiel. Die Zahl 60 hat die Divisoren 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

$\varphi(1)$	1	$\varphi(5)$	4	$\varphi(15)$	8
$\varphi(2)$	1	$\varphi(6)$	2	$\varphi(20)$	8
$\varphi(3)$	2	$\varphi(10)$	4	$\varphi(30)$	8
$\varphi(4)$	2	$\varphi(12)$	4	$\varphi(60)$	16

Die Summe dieser Anzahlen ist 60.

17. Jede Zahl a kann durch ein Vielfaches einer gegebenen positiven Zahl k und durch eine Zahl r der Reihe 0, 1, 2, . . , $k - 1$ ohne Ausnahme und auf eine Weise so dargestellt werden, daß $a = sk + r$. Wäre zugleich $a = s'k + r'$, so wäre $r - r' = (s' - s)k$ durch k theilbar gegen die über r und r' gemachte Voraussetzung.

Zufolge dieser Darstellung der Zahl a heißt r der Rest von a nach dem Modulus k. Wenn zwei Zahlen a und b nach dem Modul k denselben Rest haben oder nicht, so werden sie congruent oder incongruent nach dem Modul k genannt. Um die Congruenz der Zahlen a und b nach dem Modul k auszudrücken, schreibt man*)

$$a \equiv b, \text{ mod } k.$$

Z. B. $32 \equiv 17$, mod 5, weil 32 und 17 nach dem Modul 5 denselben Rest 2 haben; $23 \equiv -17$, mod 8, weil 23 und -17 nach dem Modul 8 denselben Rest 7 haben. Die nach dem Modul k mit b congruenten Zahlen sind von der Form $b + tk$.

Die Differenz der nach dem Modul k congruenten Zahlen a und b ist von der Form tk d. h. durch den Modul der Congruenz theilbar. Ein gemeinschaftlicher Divisor von a und k geht auch in b auf; der größte gemeinschaftliche Divisor von a und k ist zugleich der größte gemeinschaftliche Divisor von b und k.

Umgekehrt schließt man, daß die Zahlen a und b nach dem Modul k congruent oder incongruent sind, je nachdem ihre Differenz durch k theilbar oder nicht theilbar ist.

18. I. Wenn zwei Zahlen nach dem Modul k congruent sind, so

---

*) Gauß Disq. arithm. 1 ff. Vergl. Dirichlet Zahlentheorie §. 17.

sind sie auch nach jedem Divisor von k congruent. Wenn zwei Zahlen nach den Moduln k, l, m . . congruent sind, so sind sie auch nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus der Moduln congruent (5). Denn nach der Voraussetzung geht k in der Differenz der beiden Zahlen auf, folglich u. s. w.

II. Wenn nach einem Modul die Zahlen a und b, m und n congruent sind, so sind auch die Summen oder Differenzen $a \pm m$ und $b \pm n$, die Producte am und bn, die Potenzen a^c und b^c nach demselben Modul congruent. Denn nach der Voraussetzung geht der Modul sowohl in $a - b$, als auch in $m - n$ auf, folglich u. s. w. (2).

Wenn überhaupt nach einem Modul die Zahlen x und y, a_0 und b_0, a_1 und b_1, a_2 und b_2 , . . congruent sind, so sind auch die Polynomien $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ..$ und $b_0 + b_1y + b_2y^2 + ..$ nach demselben Modul congruent.

III. Aus der Congruenz der Vielfachen am und bm nach dem Modul k folgt die Congruenz der Zahlen a und b (nicht nach dem Modul k, sondern nur) nach dem Modul $\frac{k}{\delta}$, wenn durch δ der größte gemeinschaftliche Divisor von m und k bezeichnet wird. Denn nach der Voraussetzung ist $m(a - b)$ durch k theilbar, also auch $\frac{m}{\delta}(a-b)$ durch $\frac{k}{\delta}$ theilbar; nun ist $\frac{m}{\delta}$ prim zu $\frac{k}{\delta}$, folglich $a-b$ durch $\frac{k}{\delta}$ theilbar (4).

Aus $27 \equiv 12$, mod 5 schließt man $9 \equiv 4$, mod 5.
Aus $120 \equiv 84$, mod 18 schließt man $10 \equiv 7$, mod 3.

19. Alle Zahlen werden nach dem Modul k in k Classen so getheilt, daß die Zahlen einer Classe mit 0, die Zahlen einer andern Classe mit 1, u. s. w., die Zahlen der letzten Classe mit $k - 1$ nach dem Modul k congruiren. Zahlen einer Classe sind congruent, Zahlen verschiedener Classen sind incongruent nach dem angenommenen Modul (17). Wählt man aus jeder Classe eine Zahl nach Belieben aus, so hat man ein vollständiges System nach dem Modul k incongruenter Zahlen, wie es z. B. je k folgende Zahlen $c, c + 1, c + 2, .., c + k - 1$ bilden.

Wenn die Zahlen $x_1, x_2, .., x_k$ nach dem Modul k incongruent sind und b prim zu k, so bilden die Zahlen $a + bx_1, a + bx_2, ..,$ $a + bx_k$ wiederum ein vollständiges System incongruenter Zahlen. Wären $a + bx_1$ und $a + bx_2$ congruent nach dem Modul k, so wäre ihre Differenz $b(x_1 - x_2)$ durch k theilbar; nun ist b prim zu k, also wäre $x_1 - x_2$ durch k theilbar (4), mithin $x_1 \equiv x_2$, mod k gegen die Voraussetzung.

Wenn δ ein Divisor von k ist, so giebt es $\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)$ Zahlen der Reihe 1, 2, . . , k, für welche δ der größte Divisor ist, den sie mit k gemein haben (16). Also giebt es $\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)$ Classen, die solche Zahlen enthalten, daß δ der größte Divisor ist, welchen sie mit k gemein haben. Insbesondere giebt es $\varphi(k)$ Classen, deren Zahlen prim zu k sind.

20. Die Reste von Producten oder Potenzen werden am einfachsten aus den Resten ihrer Factoren berechnet. Wenn a und a' nach dem Modul k die Reste r und r' haben, so hat aa' nach dem Modul k denselben Rest als rr' d. h. $aa' \equiv rr'$, mod k (18). Und wenn a^α den Rest s hat, so hat $a^{\alpha+1}$ denselben Rest als rs. Z. B. Nach dem Modul 13 haben 217 und 57 die Reste 9 und 5, folglich ist $217 \cdot 57 \equiv 9 \cdot 5 \equiv 6$, und $57^2 \equiv 25 \equiv -1$.

Nach dem Modul 2 ist $a^\alpha \equiv a$, weil beide den Rest 0 oder 1 haben, je nachdem a gerade oder ungerade ist.

Nach dem Modul 5 sind alle Zahlen congruent mit einer der Zahlen $0, 1, -1, 2, -2$. Nach demselben Modul sind also alle Quadrate congruent mit einer der Zahlen $0, 1, -1$. Daher ist entweder a oder $a^2 - 1$ oder $a^2 + 1$ durch 5 theilbar, mithin ist $a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a^5 - a$ durch 5 theilbar, d. h. $a^5 \equiv a$, mod 5 und mod 2, folglich auch mod 10. Die 5ten Potenzen haben dieselben Einer als die Zahlen.

Nach dem Modul 13 sind die Potenzen $57, 57^2, 57^3, \ldots$ der Reihe nach congruent mit $5, -1, -5, 1$ in periodischer Wiederkehr. Nach dem Modul 11 sind $9, 9^2, 9^3, \ldots$ der Reihe nach congruent mit $-2, 4, 3, 5, 1$; nach dem Modul 5 sind dieselben Potenzen der Reihe nach congruent mit $-1, 1$. Nach dem Modul 12 sind $15, 15^2, 15^3, \ldots$ der Reihe nach congruent mit $3, -6, -3, 6$.

21. Wenn der Modul eine Primzahl p und der Dignand a durch p nicht theilbar ist, so bilden die Reste der Potenzen $a, a^2, a^3, \ldots$ Perioden von höchstens $p - 1$ Gliedern, indem $a^{p-1} \equiv 1$, $a^p \equiv a, \ldots$, mod p*). Wenn der Modul eine zusammengesetzte Zahl k und a prim zu k ist, so bilden die Reste von $a, a^2, a^3, \ldots$ Perioden von höchstens $\varphi(k)$ d. i. so viel Gliedern, als Zahlen der Reihe 1, 2, . . , k prim zu k sind, indem $a^{\varphi(p)} \equiv 1$, mod k.

---

*) Fermat's Lehrsatz (1640). Die Ausdehnung dieses Satzes auf zusammengesetzte Moduln hat Euler gefunden Nov. Comm. Petrop. 8. p. 74. Vergl. Gauß Disq. arithm. 50. Der obige einfache Beweis ist von Dirichlet gegeben worden Crelle J. 3 p. 390 und Zahlentheorie §. 19.

Nach dem Modul 5 hat 3^4 den Rest 1, nach dem Modul 37 hat 5^{36} den Rest 1. Nach dem Modul 7 hat nicht nur 2^6, sondern auch schon 2^3 den Rest 1; nach dem Modul 13 hat 5^{12}, aber auch schon 5^4 den Rest 1. Weil $\varphi(15) = 8$, so ist $2^8 \equiv 1$, mod 15; es hat aber auch schon 2^4 nach dem Modul 15 den Rest 1.

Beweis. Wenn $a, 2a, 3a, ..$ nach dem Modul p die Reste $r_1, r_2, r_3, ..$ haben, so sind die Producte $1 . 2 . 3 ... (p - 1)a^{p-1}$ und $r_1 r_2 r_3 .. r_{p-1}$ congruent (18). Weil a prim zu p, so sind die Reste $r_1, r_2, ..$ von 0 verschieden und incongruent (19), mithin Zahlen der Reihe $1, 2, .., p - 1$, so daß ihr Product den Werth $1 . 2 . 3 ... (p - 1)$ hat. Dieser Werth ist prim zu p, folglich (18, III) $a^{p-1} \equiv 1$, mod p. Die Congruenz $a^p \equiv a$, mod p findet auch dann noch statt, wenn a durch p theilbar ist.

Wenn der Modul die zusammengesetzte Zahl k ist, und die Zahlen der Reihe $1, 2, ... k$, welche prim zu k sind und deren es $\varphi(k)$ giebt, durch $k_1, k_2, k_3, ..$ bezeichnet werden, wenn ferner die Zahlen $ak_1, ak_2, ak_3, ..$ nach dem Modul k die Reste $r_1, r_2, r_3, ..$ haben, so ergiebt sich wiederum durch Multiplication

$$a^{\varphi(k)} k_1 k_2 k_3 .. \equiv r_1 r_2 r_3 .., \text{ mod } k.$$

Nach der Voraussetzung sind a und k relative Primzahlen, $k_1, k_2, k_3, ..$ incongruente Zahlen, also sind auch $r_1, r_2, r_3, ..$ incongruent, von 0 verschieden und prim zu k, mithin Zahlen der Reihe $k_1, k_2, k_3, ..$, so daß $r_1 r_2 r_3 .. \equiv k_1 k_2 k_3 ..$, u. s. w.

22. Alle durch k nicht theilbaren Quadrate sind nach dem Modul k mit gewissen Zahlen der Reihe $1, 2, .., k - 1$ congruent, mit den übrigen nicht. Die erstern Zahlen (und die mit ihnen congruenten Zahlen) heißen die quadratischen Reste von k, die übrigen heißen die quadratischen Nicht-Reste von k.*)

Weil $(k \pm x)^2 - x^2$ durch k theilbar ist, so ist

$$(k \pm x)^2 \equiv x^2, \text{ mod } k$$

und man braucht, um die Reste aller Quadrate nach dem Modul k d. h. alle quadratischen Reste von k zu finden, nur die Reste der Quadrate von $1, 2, .., \frac{1}{2}(k - 1)$ oder $\frac{1}{2}k$, je nachdem k ungerade oder gerade, aufzusuchen. Der Charakter einer Zahl wird dadurch bestimmt, daß man entscheidet, ob sie zu den (quadratischen) Resten oder zu den Nichtresten von k gehört.

Da $(a + 1)^2 = a^2 + (2a + 1)$ ist, so kann man die Quadrate

*) Diese für die Arithmetik wichtige Unterscheidung ist von Euler (Opusc. anal. I p. 263) gemacht worden. Vergl. Gauß Disq. arithm. 94 ff. Dirichlet Zahlentheorie §. 32 ff.

von 1, 2, 3,.. durch Addition der ungeraden Zahlen bilden, $2^2 = 1^2 + 3$, $3^2 = 2^2 + 5$, u. s. w., und die folgenden Reste aus dem jedesmal vorhergehenden Rest, indem man zu ihm eine ungerade Zahl addirt, ableiten. Z. B. nach dem Modul 13 sind $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ der Reihe nach congruent mit $1, 1 + 3, 4 + 5, 9 + 7 \equiv 3, 3 + 9, 12 + 11 \equiv 10$; alle Quadrate, in denen 13 nicht aufgeht, congruiren nach dem Modul 13 mit einer der Zahlen 1, 3, 4, 9, 10, 12, welche die (quadratischen) Reste von 13 heißen, während 2, 5, 6, 7, 8, 11 die Nichtreste von 13 sind.

		3	5	7	9	11	13			
14 hat	die Reste	1	4	9	2	11	8	7		
	Nichtreste	3	5	6	10	12	13			
		3	5	7	9	11	13			
15 hat	die Reste	1	4	9	1	10	6	4		
	Nichtreste	2	3	5	7	8	11	12	13	14
		3	5	7	9	11	13	15		
17 hat	die Reste	1	4	9	16	8	2	15	13	
	Nichtreste	3	5	6	7	10	11	12	14	

Wenn p eine ungerade Primzahl ist, und wenn a und b Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(p - 1)$ bedeuten, so sind a^2 und b^2 nach dem Modul p incongruent; wäre $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ durch p theilbar, so müßte, weil $a - b$ prim zu p ist, $a + b$ durch p theilbar sein, gegen die über a und b gemachte Voraussetzung. Daher giebt es nicht weniger als $\frac{1}{2}(p - 1)$ quadratische Reste von p.

23. Wenn p eine Primzahl und a durch p nicht theilbar ist, so können die Zahlen $1, 2, \ldots, p - 1$ so gepaart werden, daß die aus den einzelnen Paaren gebildeten Producte nach dem Modul p mit a congruiren. Wenn insbesondere a ein quadratischer Rest von p ist, so giebt es in der Reihe $1, 2, \ldots, p - 1$ zwei zu p sich ergänzende Zahlen, welche mit sich selbst Paare von der angegebenen Art bilden*).

Beispiel. Die quadratischen Reste von 7 sind 1, 2, 4; daher gehört 12 zu den Nichtresten, 9 zu den Resten. Aus den Zahlen 1 bis 6 lassen sich 3 Paare bilden, so daß die aus den Paaren gebildeten Producte nach dem Modul 7 mit 12 congruiren, und 4 Paare, so daß die Producte mit 9 congruiren. In der That sind nach dem Modul 7

$$1 . 5 \equiv 2 . 6 \equiv 3 . 4 \equiv 12,$$
$$1 . 2 \equiv 3 . 3 \equiv 4 . 4 \equiv 5 . 6 \equiv 9.$$

Beweis. Wenn m eine der Zahlen $1, 2, \ldots, p - 1$ bedeutet, also prim zu p ist, so haben die Zahlen $m, 2m, \ldots, (p - 1)m$ nach dem Modul p verschiedene Reste aus der Reihe $1, 2, \ldots, p - 1$ (19).

*) Diesen Satz und die Beweise der folgenden Sätze verdankt man Dirichlet Crelle J. 3. p. 390.

Einer dieser Reste ist aber auch der Rest von a nach dem Modul p, weil a durch p nicht theilbar ist. Also giebt es unter den Producten $m, 2m, .., (p-1)m$ eines und nicht mehr als eines, das mit a nach dem Modul p congruirt.

Wenn a ein quadratischer Rest von p ist, so giebt es eine und nicht mehr als eine Zahl k der Reihe $1, 2, .., \frac{1}{2}(p-1)$, welche mit sich selbst ein Paar bildet von der Art, daß $k^2 \equiv a$, mod p (22). Zugleich ist dann auch $(k-p)^2 \equiv a$, mod p.

24. Wenn p eine Primzahl und a durch p nicht theilbar ist, so ist

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, (p-1) \equiv \varepsilon a^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

wo ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem a von p ein quadratischer Nichtrest oder ein Rest ist.

Beweis. Wenn a ein Nichtrest von p ist, so lassen sich die Zahlen $m, m_1, m_2, ..$ der Reihe $1, 2, .., p-1$ mit andern Zahlen $n, n_1, n_2, ..$ derselben Reihe dergestalt paaren, daß (23)

$$mn \equiv m_1 n_1 \equiv m_2 n_2 \equiv .. \equiv a, \text{ mod } p.$$

Aus diesen $\frac{1}{2}(p-1)$ Congruenzen schließt man (18, II)

$$m\, m_1 m_2 \,..\, n\, n_1 n_2 \,.. \equiv a^{\frac{1}{2}(p-1)}, \text{ mod } p.$$

Nun ist $m m_1 m_2 .. n n_1 n_2 .. = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, (p-1)$, u. s. w.

Wenn a ein Rest von p ist, so lassen sich Zahlen $m, m_1, m_2, ..$ der Reihe $1, 2, .., p-1$ nach Ausschluß von zwei bestimmten Zahlen k und $p-k$ mit andern Zahlen $n, n_1, n_2, ..$ derselben Reihe dergestalt paaren, daß $mn \equiv m_1 n_1 \equiv m_2 n_2 \equiv .. \equiv a$, mod p. Aus diesen $\frac{1}{2}(p-3)$ Congruenzen folgt

$$m m_1 m_2 \,..\, n n_1 n_2 \,.. = \frac{1 . 2 . 3 ... (p-1}{k(p-k)} \equiv -a^{\frac{1}{2}(p-3)}, \text{ mod } p.$$

Nun ist $k(p-k) \equiv -k^2 \equiv -a$, mod p, folglich durch Multiplication

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, (p-1) \equiv -a^{\frac{1}{2}(p-1)}, \text{ mod } p.$$

25. Wenn p eine Primzahl ist, so ist*)

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,....\, (p-1 \equiv -1, \text{ mod } p.$$

Denn 1 gehört zu den quadratischen Resten von p und $1^{\frac{1}{2}(p-1)} = 1$, folglich u. s. w. (24). Umgekehrt schließt man, daß p eine Primzahl ist, wenn p in $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, (p-1)+1$ aufgeht; wäre p durch eine kleinere Zahl q theilbar, so ginge q in $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, (p-1)$ auf, also nicht in $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, (p-1)+1$.

---

*) Wilson's Satz (1770). Vergl. Gauß Disq. arithm. 76.

Wenn p eine Primzahl und a durch p nicht theilbar, so ist $a^{\frac{1}{2}(p-1)}$ congruent entweder mit 1 oder mit — 1, je nachdem a von p ein quadratischer Rest oder ein Nichtrest ist*). Nach dem eben bewiesenen Satze ist $1.2.3...(p-1) \equiv -1$, folglich u. s. w. (24).

Weil p entweder in $a^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1$ oder in $a^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1$ aufgeht, so geht es immer in dem Product dieser Formeln d. i. $a^{p-1} - 1$ auf, wie der Fermat'sche Satz (21) aussagt.

§. 14. Quadrat einer Decimalzahl.

1. Das Quadrat eines Polynomium besteht aus dem Quadrat des ersten Gliedes, dem doppelten Product des ersten Gliedes mit dem zweiten nebst dem Quadrat des zweiten Gliedes, dem doppelten Product der ersten 2 Glieder mit dem dritten nebst dem Quadrat des dritten Gliedes, dem doppelten Product der ersten 3 Glieder mit dem vierten nebst dem Quadrat des vierten Gliedes, u. s. f.

Beweis. Nach §. 9, 5 ist

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (\overline{a+b}+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)\cdot c + c^2\\ (\overline{a+b+c}+d)^2 &= (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\\ &\quad + 2(a+b)c + c^2\\ &\quad + 2(a+b+c)d + d^2, \text{ u. s. f.}\end{aligned}$$

2. Eine Decimalzahl d. i. ein Polynomium bestehend aus Einern, Zehnern, Hunderten, u. s. w., und aus Zehnteln, Hunderteln, u. s. w. wird nach obiger Regel quadrirt, indem man das Quadrat der höchsten Stelle in die erste Zeile setzt, dann der Verdoppelung der höchsten Stelle die nächste Stelle anhängt, die so entstandene Zahl mit der zweiten Stelle multiplicirt und das Product in die zweite Zeile 2 Stellen weiter rechts setzt; dann der Verdoppelung der zwei höchsten Stellen die nächste Stelle anhängt, die so entstandene Zahl mit der 3ten Stelle multiplicirt und das Product in die 3te Zeile 2 Stellen weiter rechts setzt, u. s. w., endlich die Zeilen colonnenweise addirt, z. B.

$$\begin{array}{ll} \underline{7486^2} = & 49\,.\,. \\ 14 & \;\;576\,.\,. \\ 148 & \;\;\;11904\,.\,. \\ 1496 & \;\;\;\;\;\;\underline{89796} \\ & \;\;56040196 \end{array}$$

*) Euler's Satz (Opusc. anal. I p. 263).

Die einzelnen Zeilen sind entstanden aus 7 . 7, 144. 4, 1488 . 8, 14966 . 6. In dem ersten Product bedeutet jeder Factor Tausende, im zweiten Product Hunderte, im dritten Product Zehner, u. s. f. Daher die obige Regel für die Unterordnung der einzelnen Zeilen. Das Comma wird hinter das Quadrat der Einer gesetzt. Z. B.

$30{,}018^2$	$= 900{,}00\,..$	$0{,}0209^2$	$= 0{,}000400\,..$
60 0	6001 ..	40	3681
60 02	480224		0,00043681
	901,080324		

Das abgekürzte Verfahren, welches man beim Quadriren ungenauer Decimalzahlen anzuwenden hat, erhellt aus folgenden Beispielen:

$28{,}357^2$	$= 4\,..$	$3{,}15806^2$	$= 9,\,..$
4	384, ..	6 2	61 ..
56 6	16 89	6 30	3125 .
	2 83	6 316	5046
	39		38
	804,11		9,97334

3. Beginnt die Zahl mit der *m*ten Stelle vor dem Comma, so beginnt das Quadrat mit der $(2m - 1)$ten oder $2m$ten Stelle vor dem Comma.

Beginnt die Zahl mit der *m*ten Stelle nach dem Comma, so beginnt das Quadrat mit der $2m$ten oder $(2m - 1)$ten Stelle nach dem Comma.

Z. B. Das Quadrat von 3 Tausenden hat 9 Millionen
„ „ 4 „ „ 16 „
„ „ 3 Tausendteln „ 9 Milliontel
„ „ 4 „ „ 16 „

§. 15. Quadratwurzel einer Decimalzahl.

1. Quadratwurzel einer Zahl ist die Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl (Radicandus) gleich ist. Die Quadratwurzel von a wird bezeichnet $\sqrt{a}$. Das Zeichen $\sqrt{\ }$ wurde aus dem Anfangsbuchstaben von radix im 16ten Jahrh. gebildet. Ein Strich, der die Fortsetzung des Wurzelzeichens bildet, ersetzt die Klammern, in welche man den Radicandus einzuschließen hat, wenn er ein Product oder ein Polynomium ist.

$$\sqrt{a}^{\,2} = a, \quad \sqrt{\ }\, a^2 = a.$$
$$\sqrt{\ }\,49 = 7 \quad \text{weil } 7^2 = 49.$$

$$\sqrt{0{,}09} = 0{,}3 \text{ weil } 0{,}3^2 = 0{,}09.$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{(a+b)}.$$

2. Ist der Radicandus eine Decimalzahl und beginnt er mit der $(2m - 1)$ten oder $2m$ten Stelle vor dem Comma, so beginnt die Quadratwurzel mit der $m$ten Stelle vor dem Comma (§. 14, 3).

Beginnt der Radicandus mit der $(2m - 1)$ten oder $2m$ten Stelle nach dem Comma, so beginnt die Quadratwurzel mit der $m$ten Stelle nach dem Comma.

$\sqrt{38475}$ erhebt sich bis in die Hunderte,
$\sqrt{0{,}007}$ " " " Hundertel.

3. Um die Quadratwurzel einer Decimalzahl zu berechnen, z. B. 28573,84521, theilt man dieselbe vom Comma auf- und abwärts in Abtheilungen von je zwei Stellen:

2 | 85 | 73,84 | 52 | 1

und erkennt (2), daß die Wurzel sich in die Hunderte erhebt, also etwa a Hunderte, b Zehner, c Einer, d Zehntel, . . enthält. Die einzelnen Stellen dieser unbestimmten Decimalzahl sind der Reihe nach so zu bestimmen, daß die Stücke des Quadrats derselben (§. 14, 2) von dem Radicandus subtrahirt kleinste positive Reste übrig lassen.

Zuerst darf a^2 die erste Abtheilung 2 nicht übersteigen, damit das Quadrat der Wurzel vom Radicandus subtrahirt werden kann. Daher $a = 1$. Man subtrahirt a^2, fügt dem Rest 1 die nächste Abtheilung 85 hinzu und bildet die Verdoppelung 2 der ersten Wurzelstelle.

Ferner muß $2b$ weniger als 18 betragen. Daher $b = 18 : 2$, wovon nicht mehr als 6 brauchbar ist, weil schon $27 \,.\, 7$ mehr als 185 beträgt. Man subtrahirt $26 \,.\, 6$ von 185, fügt dem Rest 29 die nächste Abtheilung 73 hinzu und bildet die Verdoppelung 32 der 2 ersten Wurzelstellen.

Ferner muß $32c$ weniger als 297 betragen. Daher $c = 297 : 32$, wovon 9 zu nehmen. Man subtrahirt $329 \,.\, 9$ von 2973, fügt dem Rest 12 die nächste Abtheilung 84 hinzu und bildet die Verdoppelung 338 der 3 ersten Wurzelstellen.

Ferner muß $338d$ weniger als 128 betragen. Daher $d = 128 : 338$, wovon 0 zu nehmen. Man braucht $3380 \,.\, 0$ von 1284 nicht erst zu subtrahiren, fügt aber dem Rest 1284 die nächste Abtheilung 52 hinzu und bildet die Verdoppelung 3380 der 4 ersten Wurzelstellen, u. s. f. nach folgendem Schema:

$\sqrt{2\vert 85\vert 73{,}84\vert 52\vert 1}$	=	169,037 . .
1		2
1 85		32
1 56		338
29 73		3380
29 61		33806
12 8452		
10 1409		
2 7043 10		
2 3664 69		
3378 41 . .		

Beim Abbruch der Rechnung wird die letzte Stelle der Wurzel um 1 erhöht, wenn dabei ein absolut kleinerer Rest bleibt. Im vorstehenden Beispiel hat die letzte Stelle besser 8 als 7 Einheiten.

Wenn der Radicandus ein echter Decimalbruch ist, so hat die Quadratwurzel 0 Einer, die Zehntel der Wurzel sind die Wurzel der Hundertel des Radicandus; wenn deren auch 0 sind, so sind die Hundertel der Wurzel die Wurzel von den Zehntausendteln des Radicandus, u. s. f.

$\sqrt{0{,}1} = \sqrt{0{,}10}$ = 0,316 . .			$\sqrt{0{,}00003}$ = 0,00547 . .	
9	62		25	108
100			500	
61			416	
3900			8400	
3756			7609	
144			791 . .	

4. Nachdem man m Stellen der Wurzel (abgesehen von vorausgehenden Nullen) berechnet hat, findet man $m - 1$ bis m folgende Stellen der Wurzel einfacher, indem man den Rest durch die doppelte bekannte Wurzel abgekürzt dividirt. Z. B.

$\sqrt{30}$	=	$5{,}4772_3$
25		10
500		108
416		1094
8400		
7609		
791		
766		
25		
22		
3		

Für 7910 : 1094 nimmt man 791 : 109,4 und berechnet diesen Quotienten so genau als möglich nach den Regeln der abgekürzten Division.

Ist a der Radicandus, b der berechnete Theil von $\sqrt{a}$ und r der Rest, mithin $b^2 + r = a$, und setzt man $b + \frac{r}{2b}$ für die gesuchte Quadratwurzel, so ist der begangene Fehler

$$b + \frac{r}{2b} - \sqrt{a} = \frac{(b + r:2b)^2 - a}{b + r:2b + \sqrt{a}} = \frac{r^2}{2b(2b^2 + r + 2b\sqrt{a})}$$

$$= \frac{r^2}{2b(b + \sqrt{a})^2} < \left(\frac{r}{2b}\right)^2 : 2b$$

In dem obigen Beispiele ist $\frac{r}{2b}$ nahe $= 0{,}007$, $2b$ nahe $= 10$, mithin der Fehler $< 0{,}000\,005$.

§. 16. Lehrsätze von den Quadratwurzeln.

(Heis §§. 50. 51. 42. 43. 49. 55).

1. Die Quadratwurzel eines **Products** ist das Product der Wurzeln von den Factoren.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Beweis. $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ ist das Product der Factoren $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{b}$ (§. 4) oder der Factoren $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b}$ (§. 3, 3) d. i. ab, der Radicandus (§. 15, 1).

Weil $12 = 4 \,.\, 3$, so ist $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
Weil $63 = 9 \,.\, 7$, so ist $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.
Weil $75 = 25 \,.\, 3$, so ist $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, u. s. w.

$$2\sqrt{7} = \sqrt{4}\,\sqrt{7} = \sqrt{28},\quad \sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{15},\quad \sqrt{3}\sqrt{15} = 3\sqrt{5}.$$

Die Brüche $\frac{a}{\sqrt{b}}$ und $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ werden einfacher ausgedrückt, indem man den Nenner und den Zähler des einen mit $\sqrt{b}$, des andern mit $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ multiplicirt:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b},\quad \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}.$$

2. Die Quadratwurzel eines **Bruches** ist der Quotient der Wurzel des Zählers durch die Wurzel des Nenners.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Beweis. $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a}{b}.$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{15}{21}} = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Die Quadratwurzel eines gemeinen Bruches wird am leichtesten berechnet, nachdem man den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt hat:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0{,}666\ldots}, \text{ bequemer als } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Die Quadratwurzel eines allgemeinen Bruches wird am einfachsten dargestellt, indem man den Bruch so umformt, daß der Nenner ein Quadrat wird:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}, \qquad \sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{21}{36}} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

3. Die Quadratwurzel eines Polynomium ist von dem Aggregat der Wurzeln der einzelnen Glieder verschieden.

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

weil $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < a + b < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. Es ist aber

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2} = \sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}}$$

also z. B.

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}},$$

woraus durch Addition und Subtraction folgt:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}},$$

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}.$$

Beispiel. $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

a	8	a^2-b^2	4
b	$2\sqrt{15}$	$\sqrt{a^2-b^2}$	2
a^2	64	$\frac{1}{2}(a+\sqrt{\ })$	5
b^2	60	$\frac{1}{2}(a-\sqrt{\ })$	3

Die Quadratwurzel eines Polynomium kann gliedweise nach der Methode entwickelt werden, welche zur Berechnung der Quadratwurzel einer Decimalzahl dient (§. 15, 3. Vergl. §. 12, 4).

4. Die Quadratwurzel einer ganzen Zahl ist entweder ganz oder

irrational*) d. h. durch Brüche nicht genau angebbar, sondern nur begrenzbar mit beliebig kleinem Fehler.

Beweis. Wäre $\sqrt{a} = \frac{r}{s}$, ein irreductibler Bruch (§. 13, 3), so wäre $\left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{r^2}{s^2}$ (§. 11, 5) $= a$ (§, 15, 1). Nun ist $\frac{r^2}{s^2}$ irreductibel (§. 13, 6), mithin a keine ganze Zahl gegen die Voraussetzung. Also kann $\sqrt{a}$ durch einen Bruch nicht genau angegeben werden. Zu jeder willkürlich gewählten ganzen Zahl s läßt sich eine bestimmte ganze Zahl r ermitteln, so daß

$$\frac{r}{s} < \sqrt{a} < \frac{r+1}{s}.$$

Dadurch findet man für $\sqrt{a}$ den Näherungswerth $\frac{r}{s}$ mit einem Fehler, der geringer ist als $\frac{1}{s}$.

Anmerkung. Die durch Brüche genau angebbaren Zahlen heißen rational (ῥητός). Die Quadratwurzel einer ganzen Zahl kann ein periodischer Decimalbruch nicht sein, weil dessen Werth rational ist.

5. Jede Quadratwurzel ist zweideutig (biformis), d. h. ihr Werth kann sowohl positiv als negativ genommen werden. Wenn b ein Werth von $\sqrt{a}$ ist, so ist auch $-b$ ein Werth von $\sqrt{a}$, weil $(-b)^2 = b^2$ (§. 9, 2).

$\sqrt{49} = \pm 7$, $\sqrt{a^2} = \pm a$. Das Doppelzeichen wird nöthig, sobald man das Wurzelzeichen nicht mehr schreibt. Das Product von Wurzeln $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ist zweideutig wie $\sqrt{ab}$ (1), nur $\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a}^{\,2} = a$ ist eindeutig. Die Summe $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ist vierdeutig.

6. Die Quadratwurzeln negativer Zahlen sind imaginär, d. h. sie können durch Multiplication und Division aus der irreductiblen $\sqrt{-1}$ abgeleitet werden, welche die positive oder negative imaginäre Einheit genannt und durch $\pm i$ bezeichnet wird**). Nach (1) setzt man $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ auch in dem Falle, daß x und y nicht beide positiv sind, also

---

*) ἄλογος, ἄῤῥητος, surdus. Das letztere Wort, welches bei Leonardo 1202 (liber abaci fol. 160) vorkommt und noch im 18ten Jahrh. gebräuchlich ist, war vermuthlich die Uebersetzung der arabischen Uebersetzung des griechischen Kunstwortes. Die Irrationalität ist schon bei Plato Gegenstand mehrfacher Betrachtung. Eine ausführliche Abhandlung über das Irrationale liegt im 10ten Buche von Euclid's Elementen vor. Aus dieser Quelle wurden die obigen Sätze von den Wurzeln abgeleitet.

**) Die imaginären Zahlen sind seit der Auflösung der cubischen und biquadra-

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)a} = \sqrt{-1}\sqrt{a} = i\sqrt{a}$$
$$\sqrt{-81} = \pm 9i, \quad \sqrt{-b^2} = \pm ib, \quad \sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a}$$

Die Quadratwurzel der negativen Einheit ist irreductibel, weder 1, noch -1, noch eine von 1 oder -1 verschiedene positive oder negative Zahl, weil die Quadrate dieser Zahlen von -1 verschieden sind.

Die aus 1 und -1 durch Multiplication und Division abgeleiteten Zahlen heißen reale Zahlen im Gegensatz zu den aus i und $-i$ abgeleiteten imaginären Zahlen. Die Reihe der realen und die Reihe der imaginären Zahlen haben nur die Null gemein. Bei der nach (1) zu verrichtenden Multiplication und Division imaginärer Zahlen hat man zu beachten, daß

$$\begin{array}{ll} i^2 = -1 & i^6 = i^4 i^2 = -1 \\ i^3 = i^2 i = -i & i^7 = i^4 i^3 = -i \\ i^4 = i^2 i^2 = 1 & i^8 = i^4 i^4 = 1 \\ i^5 = i^4 i = i & \ldots\ldots \end{array}$$

Demnach ist ferner

$$\frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i$$
$$\frac{1}{i^2} = \frac{i^4}{i^2} = i^2 = -1$$
$$\frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i, \text{ u. s. w.}$$

7. Die Zahlen, welche die Formel $x + \sqrt{y}$ umfaßt, wenn x eine beliebige reale, y eine beliebige negative reale Zahl bedeutet, sind Binomien von je einem realen und einem imaginären Gliede und werden complexe Zahlen genannt*). Die complexe Formel $a + ib$ umfaßt alle Zahlen, sie geht in die reale Zahl a oder in die imaginäre Zahl ib über, wenn b oder a verschwindet. Unter der Summe oder Diffe-

---

tischen Gleichungen in Betrachtung gezogen worden. Vergl. Klügel math. W. I, p. 37 ff. Man nannte sie „unmöglich", weil sie durch die realen Zahlen nicht ausgedrückt werden können, gleichwie man vor der Einführung der negativen Zahlen Differenzen mit überwiegenden Subtrahenden als unmöglich (falsae) verwarf. Die Ausdrücke real, imaginär kommen zuerst bei Descartes (Géom. III) vor als Prädicate der Wurzeln von Gleichungen. Das Zeichen i ist von Gauß Disq. arithm. 337 eingeführt worden.

*) Die complexen Zahlen sind, obgleich bereits Euler deren Nutzen bei wichtigen Untersuchungen gezeigt hatte, doch mehr geduldet geblieben als anerkannt worden, bis Gauß den allgemeinsten Begriff der Zahl gründete und durch Veranschaulichung feststellte. Gött. gel. Anz. 1831, April 23. Vergl. Theor. resid. biq. 30, wo die Ausdrücke „complexe Zahl, Norm derselben" zuerst vorkommen. Cauchy hatte 1821 (Anal. algébr. c. 7) die Formeln $a+ib$, $a-ib$ „conjugirt" und die positive Quadratwurzel ihres Products ihren „Modulus" genannt.

renz der Complexen $a + ib$ und $c + id$ ist die Complexe $a \pm c + i(b \pm d)$ zu verstehen. Die Differenz von zwei Complexen verschwindet nur dann, und die beiden Complexen sind nur dann einander gleich, wenn das reale Glied der einen dem realen Glied der andern und zugleich das imaginäre Glied der einen dem imaginären Glied der andern gleich ist.

Alle Zahlen können zur Uebersicht auf eine Ebene so gesetzt werden, daß die Puncte (Oerter) der realen Zahlen auf einer Geraden liegen, die Puncte der positiven Zahlen in der einen Richtung vom Nullpunct aus, die Puncte der negativen Zahlen in der entgegengesetzten Richtung, und daß die Puncte derjenigen Complexen, welche das reale Glied a gemein haben, auf einer andern Geraden liegen, welche die erstere Gerade in dem Puncte der Zahl a rechtwinkelig durchschneidet. Die Puncte der imaginären Zahlen befinden sich auf der im Nullpunct errichteten Normale der Geraden, welche die Puncte der realen Zahlen enthält.

Die Multiplication mit einer complexen Zahl besteht aus den Multiplicationen mit ihren Gliedern, so daß

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad - bd$$
$$= ac - bd + i(bc + ad),$$
$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Die Complexen $a + ib$ und $a - ib$, deren Summe und Product real ist, heißen conjugirt; die reale Zahl $a^2 + b^2$, welche durch $a + ib$ und durch $a - ib$ theilbar ist, heißt die Norm der conjugirten Complexen $a + ib$ und $a - ib$. Die Summe der conjugirten Complexen

$$(\alpha + i\beta)(a + ib)^2 + (\alpha - i\beta)(a - ib)^2$$
$$= 2\alpha a^2 - 4\beta ab - 2\alpha b^2 = \frac{2}{\alpha}(\alpha^2 a^2 - 2\alpha\beta ab - \alpha^2 b^2)$$
$$= \frac{2}{\alpha}\left\{(\alpha a - \beta b)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)b^2\right\}$$

ist dadurch ausgezeichnet, daß sie immer ein positives und ein negatives reales Glied enthält.

Die Norm des Products complexer Zahlen ist das Product ihrer Normen; in der That ist für das obige Beispiel

$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Die Division durch eine complexe Zahl kann in die Multiplication mit der conjugirten Zahl verwandelt werden, wenn man durch die Norm dividirt, weil

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Die positive Quadratwurzel einer complexen Zahl ist nach (3)

$$\sqrt{a+ib} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

$$\sqrt{a-ib} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

wenn die Quadratwurzeln positiv genommen werden.

Anmerkung. Ueberhaupt werden die verschiedenen Werthe einer mehrdeutigen irrationalen Formel conjugirt genannt. Die rationale Formel, welche durch eine gegebene irrationale Formel und alle conjugirten Werthe derselben und nur durch diese theilbar ist, heißt die Norm der irrationalen Formel. Z. B. $a + \sqrt{x}$ und $a - \sqrt{x}$ sind conjugirte irrationale Formeln, deren Norm $a^2 - x$. Vergl. Algebra §. 10.

§. 17. Lehrsätze von den Potenzen.

(Heis §§. 36. 37. 38. 34. 35. 39).

1. Um ein Product zu potenziren, hat man jeden Factor desselben zu potenziren:

$$(ab)^m = a^m\, b^m.$$

Denn $(ab)^m$ ist das Product von m Factoren ab (§. 4) in beliebiger Ordnung (§. 3, 3), also das Product von m Factoren a mit m Factoren b.

Anmerkung. Hiernach werden negative und imaginäre Zahlen potenzirt. Weil $-a = (-1)a$, so ist $(-a)^m = -1)^m a^m$. Die Potenzen von -1 sind 1 oder -1, je nachdem der Exponent gerade oder ungerade (§. 9, 3). Ebenso hat man $(ia)^m = i^m a^m$. Vergl. §. 16, 6.

2. Um einen Bruch zu potenziren, hat man den Zähler und den Nenner desselben zu potenziren:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Denn die gesuchte Potenz ist das Product von m Factoren $\frac{a}{b}$ d. i. das Product von m Factoren a dividirt durch das Product von m Factoren b (§. 11, 5).

Insbesondere ist

$$\left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{1}{b^m}.$$

3. Um eine **Potenz** zu potenziren, hat man den Exponenten derselben zu multipliciren:

$$(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b.$$

Denn die gesuchte Potenz ist das Product von c Factoren a^b, also von bc Factoren a, weil a^b das Product von b Factoren a ist. Ebenso ist $(a^c)^b$ das Product von cb $(= bc)$ Factoren a.

Dagegen bedeutet a^{b^c} eine Potenz, deren Dignandus a und deren Exponent b^c ist.

4. Um Potenzen desselben Dignandus zu multipliciren, hat man ihre Exponenten zu addiren:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Denn das gesuchte Product hat $m + n$ Factoren a.

5. Um eine Potenz durch eine Potenz desselben Dignandus zu dividiren, hat man den Exponenten des Divisor von dem Exponenten des Dividendus zu subtrahiren:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Wenn $m > n$, so kann man den Dividendus und den Divisor durch a^n dividiren und behält $m - n$ Factoren a. Wenn $m = n$, so ist der Quotient 1. Wenn $m < n$, so kann man den Dividendus und den Divisor durch a^m dividiren und behält im Dividendus 1, im Divisor $n - m$ Factoren a.

6. Die Potenz a^{m-n} wird durch den Quotienten $a^m : a^n$ auch dann erklärt, **wenn der Exponent Null oder negativ ist.** Hiernach ist

$$a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$$

unter Voraussetzung eines endlichen Dignanden a (§. 11, 8). Und

$$a^{-k} = a^{m-(m+k)} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k,$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

d. h. um mit einer ganzen Zahl zu potenziren, kann man den reciproken Dignanden mit der entgegengesetzt gleichen Zahl potenziren.

7. Die Sätze (1) bis (5) über die Rechnung mit Potenzen gelten auch dann, wenn die Exponenten **negativ** sind*).

---

*) Die erste Spur einer Rechnung mit Exponenten findet sich in **Archimedes'** ψαμμίτης 10. Vergl. **Nesselmann** Alg. d. Griechen p. 124. Negative Exponenten hat zu demselben Zweck **Stifel** (arithm. fol. 250) angewendet. Noch weiter gingen **Stevin** 1585 (**Klügel** math. W. I. p. 43) und die Erfinder der Logarithmen. Der umfassendere Begriff der Potenz ist besonders von **Newton** ausgebildet worden. Vergl. dessen Brief für **Leibniz** 1676 Jun. 13.

$$(ab)^{-m} = a^{-m}b^{-m}, \text{ weil } \left(\frac{1}{ab}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{b}\right)^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}, \text{ weil } \left(\frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{1:a}{1:b}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^m : \left(\frac{1}{b}\right)^m$$

$$(a^b)^{-c} = a^{-bc}, \text{ weil } \left(\frac{1}{a^b}\right)^c = \frac{1}{a^{bc}}$$

$$a^m a^{-n} = a^{m-n}, \text{ weil } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{-m}a^{-n} = a^{-(m+n)}, \text{ weil } \left(\frac{1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{m+n}.$$

§. 18. Die Wurzel.

(Heis §§. 41. 42. 43. 45. 46. 44. 47. 48).

1. Die *m*te **Wurzel** einer Zahl ist die Zahl, welche *m* mit (dem **Wurzel-Exponenten**) potenzirt die gegebene Zahl (den **Radicandus**) giebt, so daß

$$\text{Wurzel}^{\text{W. Expon.}} = \text{Radicandus}, \quad \sqrt[m]{a}^{\,m} = a.$$

Der Wurzelexponent wird über das Wurzelzeichen (§. 15, 1) geschrieben*). Die 2te Wurzel heißt Quadratwurzel, der Wurzelexponent 2 wird nicht geschrieben; die 3te Wurzel heißt Cubikwurzel.

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ weil } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{10000} = 10, \text{ weil } 10^4 = 10000$$

$$\sqrt[m]{a^m} = a, \quad \sqrt[m]{a^{mn}} = a^n.$$

Um die 3te, 5te, . . Wurzel einer Decimalzahl zu berechnen, kann man von der Betrachtung der 3ten, 5ten, . . Potenz einer Decimalzahl ausgehen, und ähnlich wie in §. 14 und 15 verfahren. Leichtere Mittel zur Erreichung dieses Zwecks innerhalb gegebener Rechnungsgrenzen bieten die Logarithmen dar.

2. Wenn der Wurzelexponent ein Product *rs* ist, so kann die Wurzel reducirt werden, indem man die *s*te Wurzel der *r*ten Wurzel oder die *r*te Wurzel der *s*ten Wurzel des Radicandus nimmt:

---

*) Besondere Wurzelzeichen kommen noch im Anfang des 16ten Jahrh. z. B. bei Christ. Rudolff vor, während Andere bereits anfingen, den Exponenten neben oder über das Wurzelzeichen zu setzen.

$$\sqrt[rs]{a} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}$$

Denn nach §. 17, 3 hat man

$$\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}}^{\,rs} = \left(\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}}^{\,s}\right)^r = \sqrt[r]{a}^{\,r} = a.$$

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}},\ \sqrt[6]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}},\ \sqrt[15]{a} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$$

$$\sqrt[rs]{a^{rt}} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a^{rt}}} = \sqrt[s]{a^t}$$

d. h. die Wurzel einer Potenz bleibt unverändert, wenn man beide Exponenten durch dieselbe Zahl dividirt oder mit derselben Zahl multiplicirt.

3. Die Wurzel eines Products ist das Product der Wurzeln der einzelnen Factoren:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}.$$

Denn nach §. 17, 1 ist

$$\left(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\right)^m = \sqrt[m]{a}^{\,m}\sqrt[m]{b}^{\,m} = ab.$$

4. Die Wurzel eines Bruches ist der Quotient der Wurzel des Zählers durch die Wurzel des Nenners:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Denn nach §. 17, 2 ist $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\sqrt[m]{a}^{\,m}}{\sqrt[m]{b}^{\,m}} = \frac{a}{b}.$

Man kann den gegebenen Bruch so umformen, daß sein Nenner eine $m$te Potenz wird, und erhält

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{ab^{m-1}}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{b},\ \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}.$$

Ein Bruch mit dem Nenner $\sqrt[m]{b} + \sqrt[m]{c}$ kann den Nenner $b - c$ oder $b + c$ erhalten, je nachdem m gerade oder ungerade ist (§. 12, 5).

Wenn r und s relative Primzahlen, x und y aber solche Zahlen sind, daß $rx - sy = 1$, so hat man

$$\sqrt[rs]{a} = \sqrt[rs]{a^{rx-sy}} = \sqrt[rs]{(a^{rx} : a^{sy})} = \sqrt[rs]{a^{rx}} : \sqrt[rs]{a^{sy}} = \sqrt[s]{a^x} : \sqrt[r]{a^y}.$$

5. Die *m*te Wurzel einer *n*ten Potenz kann reducirt werden, indem man die *m*te Wurzel des Dignanden mit *n* potenzirt, oder indem man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a}^{\,n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Denn nach §. 17, 3 ist

$$\left(\sqrt[m]{a}^{\,n}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}^{\,m}\right)^n = a^n.$$

Und unter der Voraussetzung, daß *m* in *n* aufgeht, ist

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n}{m}m} = a^n.$$

6. Die Potenz $a^{\frac{n}{m}}$ wird durch die Wurzel $\sqrt[m]{a^n}$ auch dann erklärt, wenn der Exponent gebrochen ist, also *m* in *n* nicht aufgeht. Hiernach kann man die frühern Sätze von den Potenzen mit ganzen Exponenten (§. 17) auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten aufstellen, und somit die bisherigen Sätze von den Wurzeln als besondere Fälle jener Sätze von den Potenzen nachweisen*).

Wenn *m* und *n* durch *c* theilbar sind, so ist

$$a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n:c}{m:c}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:c]{a^{n:c}}.$$

Wenn $n = mq + r$, so ist $a^{\frac{n}{m}} = a^{q+\frac{r}{m}} = a^q a^{\frac{r}{m}}$ übereinstimmend mit $\sqrt[m]{a^{mq+r}} = \sqrt[m]{a^{mq} a^r} = \sqrt[m]{a^{mq}}\,\sqrt[m]{a^r} = a^q \sqrt[m]{a^r}$. Ferner ist

$$(ab)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{m}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$$

$$(a:b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{m}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b},$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$a^{\frac{1}{m}} a^{\pm\frac{1}{n}} = a^{\frac{n \pm m}{mn}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a^{\pm 1}} = \sqrt[mn]{a^n}\sqrt[mn]{a^{\pm m}}$$
$$= \sqrt[mn]{a^n a^{\pm m}} = \sqrt[mn]{a^{n \pm m}}.$$

---

*) Die Wurzeln sind als Potenzen mit gebrochenen Exponenten von Stevin und Newton aufgefaßt worden. Vergl. §. 17, 7.

Anmerkung. Die Wurzeln endlicher Zahlen nähern sich mehr und mehr der Grenze 1, wenn die Wurzelexponenten ins Unendliche wachsen. Es ist nämlich unter der Voraussetzung $a > 1$

$$\sqrt[m+n]{a} < \sqrt[m]{a}, \text{ weil } \sqrt[m]{a}^{\,m+n} = a\sqrt[m]{a^n} > a.$$

Ebenso ist unter Voraussetzung $a < 1$

$$\sqrt[m+n]{a} > \sqrt[m]{a}, \text{ weil } \sqrt[m]{a}^{\,m+n} = a\sqrt[m]{a^n} < a.$$

Nun kann im ersten Falle $\sqrt[x]{a} - 1$ geringer als ein beliebig kleiner Bruch ω gemacht werden, indem man x so groß nimmt, daß $(1 + \omega)^x > a$ wird. Und im zweiten Falle kann $1 - \sqrt[x]{a} < \omega$ gemacht werden, indem man x so groß nimmt, daß $(1 - \omega)^x < a$ wird. Also ist

$$\lim \sqrt[x]{a} = \lim a^{\frac{1}{x}} = 1, \quad x = \infty.$$

7. Die Wurzeln ganzer Zahlen sind entweder ganz oder irrational (§. 16, 4). Wäre $\sqrt[m]{a}$ ein irreductibler Bruch $\frac{r}{s}$, so wäre $\left(\frac{r}{s}\right)^m = \frac{r^m}{s^m} = a$. Weil $\frac{r^m}{s^m}$ irreductibel ist (§. 13, 6), so würde a keine ganze Zahl sein gegen die Voraussetzung. Also kann $\sqrt[m]{a}$ durch einen Bruch nicht genau angegeben werden.

8. Die $m$te Wurzel einer realen oder imaginären Zahl (§. 16, 6) ist das Product einer absoluten Zahl mit der $m$ten Wurzel der positiven oder negativen realen oder imaginären Einheit. Nach (3) setzt man unter der Bedingung $a = b^m$

$$\sqrt[m]{\pm a} = b\sqrt[m]{\pm 1}, \quad \sqrt[m]{\pm ia} = b\sqrt[m]{\pm i}.$$

Die Wurzeln der verschiedenen Einheiten sind mehrdeutig*) und fallen mit den Wurzeln von Gleichungen der Form $x^m - 1 = 0$ zusammen. Vergl. Algebra §. 10.

Um die Werthe von $\sqrt[3]{1}$ zu finden, setze man $\sqrt[3]{1} = x$, folglich $x^3 - 1 = 0$. Nun ist $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. In-

*) Die Mehrheit der Wurzeln einer Gleichung wurde deutlicher erkannt, nachdem die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen gelungen war. Vergl. Descartes Géom. III. Die $m$ten Wurzeln von 1 und -1 werden zuerst in Cotes' Theorem (Harm. mens. 1722 p. 114) angetroffen, welches die Factoren von $x^m \pm 1$ geometrisch (goniometrisch) angiebt. Weit schwieriger war die algebraische Auflösung der Gleichung $x^m - 1 = 0$, welche von Vandermonde (Mém. de Paris 1771. Résol. des équat.) gefördert und von Gauß (Disq. arithm. VII. Werke II p. 243) vollbracht wurde. Vergl. Lagrange Traité des équat. Note 14.

dem man sowohl $x - 1$ als auch $x^2 + x + 1$ der Null gleichsetzt, erhält man für $x = \sqrt[3]{1}$ außer 1 die Werthe

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\,, \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Für $\sqrt[5]{1}$ findet man aus $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$, also aus den Gleichungen

$$x - 1 = 0, \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

mit Hülfe der Substitution $x + \dfrac{1}{x} = u$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 - 2$, außer 1 die Werthe

$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \tfrac{1}{4}\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) + \tfrac{1}{4}\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \tfrac{1}{4}\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) - \tfrac{1}{4}\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Zu den Werthen von $\sqrt[m]{1}$ gehört 1 unbedingt, weil $1^m = 1$; -1, wenn m gerade, weil $(-1)^m$ in diesem Falle 1 ist; $\pm i$, wenn 4 in m aufgeht, weil $(\pm i)^m$ in diesem Falle 1 ist. Die Werthe von $\sqrt[m]{-1}$ befinden sich unter den Werthen von $\sqrt[2m]{1}$, weil

$$\sqrt[m]{-1}^{\,2m} = \left(\sqrt[m]{-1}^{\,m}\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Die Werthe von $\sqrt[m]{\pm i}$ befinden sich unter den Werthen von $\sqrt[4m]{1}$, weil

$$\sqrt[m]{\pm i}^{\,4m} = \left(\sqrt[m]{\pm i}^{\,m}\right)^4 = (\pm i)^4 = 1.$$

Aus einem Werth von $\sqrt[m]{1}$ findet man nach §. 16, 7 Werthe von $\sqrt[2m]{1}$, $\sqrt[4m]{1}$, ... z. B.

$$\sqrt[8]{1} = \sqrt[4]{-1} = \sqrt{\pm i} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

vierdeutig, die übrigen Werthe sind $-i$, i, -1, 1.

9. Unter den Werthen der $m$ten Wurzel einer Einheit können solche vorkommen, welche Wurzeln derselben Einheit von geringerem Exponenten sind; z. B. zu den Werthen von $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[9]{1}$, .. gehören die Werthe von $\sqrt[3]{1}$, weil $\sqrt[3]{1}^{\,3k} = 1^k = 1$ ist. Die (complexe) Zahl α heißt eine eigentliche (primitive) $m$te Wurzel einer Einheit, wenn sie nicht zugleich eine Wurzel derselben Einheit von geringerem Exponenten ist, so daß α^k den Radicanden nur dann giebt, wenn m in k aufgeht*).

---

*) Die Benennung „primitive Wurzel" ist aus der Theorie der Potenzen-Reste (Euler 1773 Nov. Comm. Petrop. 18 p. 89. Vergl. Gauß Disquis. arithm.

I. Wenn α eine $m$te Wurzel von 1 und k eine beliebige ganze Zahl ist, so ist auch α^k eine $m$te Wurzel von 1, und α^{m+k} von α^k nicht verschieden. Denn $(\alpha^k)^m = (\alpha^m)^k = 1^k = 1$, $\alpha^{m+k} = \alpha^m \alpha^k = \alpha^k$.

II. Wenn k prim zu m ist, so ist eine von 1 verschiedene $k$te Wurzel von 1 nicht zugleich eine $m$te Wurzel von 1. Man bilde von k nach dem Modul m den Rest p, ferner von m nach p den Rest q, von p nach q den Rest r, u. s. w. Die Reihe dieser Reste geht bis auf 1 herab, weil k prim zu m (§. 13, 3). Eine von 1 verschiedene $k$te Wurzel von 1 wird durch α bezeichnet, so daß $\alpha^k = 1$. Wäre nun zugleich $\alpha^m = 1$, so wäre auch $\alpha^p = 1$, weil

$$\alpha^k = \alpha^{mx+p} = \alpha^{mx}\,\alpha^p = \alpha^p.$$

Ebenso würde man schließen, daß $\alpha^q = 1$, $\alpha^r = 1$, u. s. w., daß endlich $\alpha = 1$. Dieß ist gegen die Voraussetzung, also kann α^m nicht 1 sein.

III. Wenn α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 ist, so sind $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^m$ von einander verschieden. Gesetzt, α^r und α^s wären einander gleich, wobei r und s Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, m$ bedeuten, so wäre $\alpha^r : \alpha^s = \alpha^{r-s} = 1$, mithin α keine eigentliche $m$te Wurzel von 1. Also sind α^r und α^s verschieden.

IV. Wenn α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 und k prim zu m ist, so ist auch α^k eine eigentliche $m$te Wurzel von 1. Denn $(\alpha^k)^x = \alpha^{kx}$ ist nur dann 1, wenn m in kx aufgeht. Nun ist k prim zu m, also kx nur dann durch m theilbar, wenn m in x aufgeht (§. 13, 4).

V. Wenn α und β eigentliche $m$te und $n$te Wurzeln von 1 sind, und m prim zu n, so ist $\alpha\beta$ eine eigentliche mnte Wurzel von 1 d. h. $(\alpha\beta)^x$ nur dann 1, wenn x durch mn theilbar ist. Ist x durch m theilbar und durch n nicht theilbar, so ist $\alpha^x = 1$, β^x von 1 verschieden, also $(\alpha\beta)^x$ nicht 1. Ist x weder durch m noch durch n theilbar, so sind α^x und $\beta^x = 1 : \beta^{n-x}$ von 1 verschieden. Nun ist α^x eine $m$te Wurzel von 1, und β^{n-x} eine $n$te Wurzel von 1, also α^x von β^{n-x} verschieden (II), folglich $\alpha^x : \beta^{n-x} = \alpha^x\beta^x = (\alpha\beta)^x$ nicht 1.

Z. B. Wenn α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 und m ungerade ist, so ist $-\alpha$ eine eigentliche $2m$te Wurzel von 1, $i\alpha$ eine eigentliche $4m$te Wurzel von 1. Und wenn m durch 3 nicht theilbar ist, so ist $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})\alpha$ eine eigentliche $3m$te Wurzel von 1, u. s. w.

---

57) übertragen von Meier Hirsch algebr. Gleichungen 1809 §. 88. Zur Verhütung von Mißverständnissen hat Gauß (Werke II, p. 243) den Ausdruck eigentliche (propria) Wurzel gewählt. Die folgenden Sätze gründen sich auf die Bemerkungen Euler's (1741 Comm. Petrop. 13 p. 50) und Lagrange's (Mém. de Berlin 1770. Réflexions 24. Traité des équat. Note 13).

§. 19. Der Logarithmus.

(Heis §§. 56. 57).

1. Der a-Logarithmus einer Zahl ist die Zahl, mit welcher a (die Basis) potenzirt die Zahl (den Numerus) giebt, so daß

$$\text{Basis}^{\text{Logarithmus}} = \text{Numerus}.$$

Die Basis wird als positiv real und von 1 verschieden vorausgesetzt. Jede positive Zahl x kann als eine Potenz der Basis a vorgestellt werden, der erforderliche Exponent heißt der a-Logarithmus der Zahl x und wird durch ${}^a\log x$ bezeichnet.

$${}^2\log 32 = 5, \text{ weil } 2^5 = 32.$$
$${}^3\log 9 = 2, \text{ weil } 3^2 = 9.$$
$${}^{10}\log 10000 = 4, \text{ weil } 10^4 = 10000.$$
$${}^5\log \tfrac{1}{125} = -3, \text{ weil } 5^{-3} = \tfrac{1}{125}.$$
$${}^a\log a^m = m, \quad {}^a\log 1 = 0.$$

Wenn die Basis $a > 1$, so sind die Logarithmen der Numern über 1 positiv, der Numern unter 1 negativ, ${}^a\log \infty = \infty$, ${}^a\log 0 = -\infty$ (§. 17, 6. §. 11, 8). Wenn die Basis $a < 1$, so sind die Logarithmen der Numern über 1 negativ, der Numern unter 1 positiv, ${}^a\log \infty = -\infty$, ${}^a\log 0 = \infty$. Die Logarithmen negativer Numern sind nicht real. Wenn der Numerus keine Potenz der Basis ist, so kann man die Wurzeln der Basis zu Hülfe nehmen, um den Logarithmus zu begrenzen (§. 20, 3).

2. Nachdem die Zahlen b und c als Potenzen der Basis a mit Hülfe ihrer a-Logarithmen β und γ dargestellt worden sind,

$$b = a^\beta, \; c = a^\gamma,$$

so kann c sofort als Potenz der Basis b dargestellt und der b-Logarithmus von c angegeben werden, weil nach §. 18, 6

$$a = b^{\frac{1}{\beta}}, \quad c = a^\gamma = b^{\frac{\gamma}{\beta}},$$

d. h. der b-Logarithmus von c ist der Quotient des a-Logarithmus von c durch den a-Logarithmus der Basis b:

$${}^b\log c = \frac{{}^a\log c}{{}^a\log b}.$$

3. Der Inbegriff der Logarithmen aller Zahlen für eine bestimmte Basis heißt ein Logarithmensystem. Aus einem Logarithmensystem kann man jedes andere Logarithmensystem ableiten, indem man jeden Logarithmus des gegebenen Systems durch den Logarithmus der Basis des andern Systems dividirt (2). Z. B. die 2-Logarithmen

werden erhalten, wenn man die 10-Logarithmen durch $^{10}\log 2$ dividirt.

Bei dem gemeinen Rechnen werden die 10-Logarithmen gebraucht, welche deshalb gemeine Logarithmen (vulgares, Briggiani, decadische) heißen. Bei ihrer Bezeichnung wird die Basis weggelassen.

In der mathematischen Analysis sind die natürlichen Logarithmen (naturales, Neperiani, hyperbolici) von besonderer Wichtigkeit, deren Basis die irrationale Zahl

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}71828\ldots$$

ist; so genannt, weil sie direct (ohne Begrenzungen) sich berechnen lassen. Vergl. §. 32. Die Bezeichnungen

$$^{e}\log x,\quad \log.\,\text{nat.}\, x,\quad \ln x,\quad \lg x,\quad \mathrm{l}\, x$$

drücken sämmtlich den natürlichen Logarithmus von x aus. Alle andern Logarithmen, z. B. die gemeinen, werden künstliche Logarithmen (artificiosi) genannt, weil (2)

$$^{a}\log x = \frac{\log.\,\text{nat.}\, x}{\log.\,\text{nat.}\, a},\quad \log.\,\text{vulg.}\, x = \frac{\log.\,\text{nat.}\, x}{\log.\text{nat.}\, 10}.$$

Der reciproke natürliche Logarithmus der Basis, mit welchem die natürlichen Logarithmen multiplicirt werden müssen, um künstliche Logarithmen zu werden, heißt der Modulus des künstlichen Systems*).

Unter Voraussetzung gemeiner Logarithmen ist dagegen

$$\log.\text{nat.}\, x = \frac{\log x}{\log e}.$$

4. Der Logarithmus eines Products ist die Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren. Für die Basis a ist

---

*) Die Logarithmen (numeri rationem exponentes s. rationum compositarum) sind erfunden und benannt von Neper (Lord John Napier), der in Mirifici logarithmorum canonis descriptio 1614 die natürlichen Logarithmen der Sinus und Tangenten mittheilte. Das gemeine Logarithmensystem wurde von Briggs 1618 eingeführt. Unabhängig von den englischen Erfindungen hat Byrg ein künstliches Logarithmensystem construirt (Arithm. und geometr. Progreß-Tabuln, Prag 1620), indem er die Potenzen der Basis 1,0001 berechnete. Byrg's Tabellen enthielten neben den einzelnen Logarithmen die dazu gehörigen Numern, und waren mithin ein Canon antilogarithmicus nach einem von Wallis (Algebra c. 12) gebrauchten Ausdruck. Vergl. Gieswald über Byrg im Danziger Schulprogramm 1856. Die Quadratur hyperbolischer Sectoren und Segmente mittelst der natürlichen Logarithmen wurde 1668 von Nic. Mercator und von Jac. Gregory gelehrt. Vergl. Klügel math. W. III. p. 531 ff. Der Name „Modulus eines künstlichen Logarithmensystems" ist von Cotes Philos. Trans. 1714 p. 6 zuerst gebraucht worden. Die jetzt übliche Darstellung der Lehre von den Logarithmen scheint durch Euler 1748 (Introd. I. §. 102 ff.) begründet worden zu sein.

$$\log(xy) = \log x + \log y,$$

weil $a^{\log x + \log y} = a^{\log x}\, a^{\log y} = xy$ (§. 18, 6).

Anmerkung. Weil $x = x \,.\, 1$, $-x = x(-1)$, so ist unter der Voraussetzung $a^z = x$

$$\log x = z + \log 1,\ \log(-x) = z + \log(-1),$$
$$\log(ix) = z + \log i.$$

Davon hat log 1 den realen Werth 0, während $\log(-1)$ und $\log i$ reale Werthe nicht haben. Ist aber α ein (imaginärer) Werth von $\log i$ d. h. $a^\alpha = i$, so ist 2α ein Werth von $\log(-1)$, 3α ein Werth von $\log(-i)$, 4α ein Werth von log 1, u. s. w. Die Logarithmen sind unendlichdeutig.

5. Der Logarithmus eines Bruches ist die Differenz des Logarithmus des Zählers und des Logarithmus des Nenners. Für die Basis a ist

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y,$$

weil $a^{\log x - \log y} = a^{\log x} : a^{\log y} = x : y$.

Die Logarithmen reciproker Zahlen sind entgegengesetzt gleich:

$$\log \frac{1}{x} = -\log x, \text{ weil } \log 1 = 0.$$

6. Der Logarithmus einer Potenz (im weitern Sinne) ist das Product des Exponenten mit dem Logarithmus des Dignanden. Für die Basis a ist

$$\log x^m = m \log x,$$

weil $a^{m \log x} = (a^{\log x})^m = x^m$.

$$\log x^3 = 3 \log x,\ \log x^{-4} = -4 \log x,$$
$$\log \sqrt[5]{x^2} = \log x^{\frac{2}{5}} = \tfrac{2}{5} \log x.$$

§. 20. Die gemeinen Logarithmen der Decimalzahlen.

(Heis §. 58).

1. Der gemeine Logarithmus einer Decimalzahl besteht aus einer ohne Rechnung sofort angebbaren positiven oder negativen ganzen Zahl, welche die Kennziffer oder Charakteristik des Logarithmus heißt, und aus einem echten Decimalbruche, der die Mantisse des Logarithmus (mantissa = Zugabe) heißt.

a. Bei positiver Mantisse hat die Kennziffer so viel positive Ein-

heiten, als der Numerus Decimalstellen über den Einern hat, oder soviel **negative** Einheiten, als der Numerus Nullen vor der höchsten Decimalstelle hat.

Numerus	Logarithmus
1000	3
100	2
10	1
1	0
0,1	— 1
0,01	— 2
0,001	— 3

Da 185,7 zwischen 100 und 1000 liegt, so besteht log 185,7 aus der Kennziffer 2 und einer positiven Mantisse.

Da 0,0346 zwischen 0,01 und 0,1 liegt, so besteht log 0,0346 aus der Kennziffer — 2 und einer positiven Mantisse (oder auch aus der Kennziffer — 1 und einer negativen Mantisse). Die negative Kennziffer wird **nach** der positiven Mantisse geschrieben, z. B.

$$0, \ldots - 2 = 1, \ldots - 3 = \ldots = 8, \ldots - 10.$$

b. Umgekehrt schließt man aus der Kennziffer des Logarithmus, bis zu welcher Decimalstelle der Numerus sich erhebt.

Wenn $\log x = 3, \ldots,$ so ist $x = \ldots\ldots, \ldots$ d. h. x hat 3 Decimalstellen über den Einern. Wenn $\log x = 0, \ldots,$ so ist $x = .\,, \ldots$

Wenn $\log x = 0, \ldots - 1$, so ist $x = 0, \ldots$ d. h. x beginnt mit Zehnteln. Wenn $\log x = 0, \ldots - 4$, so ist $x = 0{,}000 \ldots$ und beginnt mit Zehntausendteln.

2. Die Logarithmen von zwei Zahlen, deren Verhältniß eine Potenz von 10 mit einem ganzen positiven oder negativen Exponenten ist, haben einerlei positive Mantissen und unterscheiden sich nur durch die Kennziffern, z. B.

log 132500, log 1325, log 13,25, log 0,1325, log 0,001325, . .

Beweis. $\log x$ und $\log (x . 10^k) = \log x + k$ (§. 19) haben dieselbe positive Mantisse, wenn k eine ganze positive oder negative Zahl ist, weil durch die ganze Zahl k nur die Kennziffer verändert wird.

3. Die Logarithmen rationaler Zahlen sind entweder ganz oder irrational. Wäre $\log x$ durch den irreductiblen Bruch $\frac{r}{s}$ genau ausdrückbar, so müßte $10^{\frac{r}{s}}$ rational, und $10^r = 2^r . 5^r$ eine $s$te Potenz, also r durch s theilbar sein (§. 13, 10).

Um die Mantissen der Logarithmen beliebiger Zahlen zu bestim-

men, braucht man nur die Mantissen der Logarithmen solcher Zahlen zu begrenzen, welche zwischen 1 und 10 liegen, weil z. B. log 3847 und log 3,847 dieselbe Mantisse haben (2).

Diese Begrenzung wird am einfachsten*) erhalten, indem man die Quadratwurzel von 10 berechnet, davon wiederum die Quadratwurzel, u. s. f. bis man auf eine Zahl kommt, welche 1 um einen Decimalbruch von unbeträchtlicher Größe übertrifft (§. 18, 6). Aus den Werthen von $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{1}{8}}$, . . läßt sich folgende Tabelle bilden:

Num.	Log.	Num.	Log.
10,00000	1,00000	1,00225	0,00098
3,16228	0,50000	1,00112	0,00049
1,77828	0,25000	1,00056	0,00024
1,33352	0,12500	1,00028	0,00012
1,15478	0,06250	1,00014	0,00006
1,07461	0,03125	1,00007	0,00003
1,03663	0,01562	1,00004	0,00002
1,01815	0,00781	1,00002	0,00001
1,00904	0,00391	1,00001	0,00000
1,00451	0,00195		

Um mit Hülfe dieser Tabelle z. B. log 7,2 zu berechnen, dividire man 7,2 durch den nächst kleinern Numerus der Tabelle 3,16228; den Quotienten 2,27684 durch den nächst kleinern Numerus 1,77828; den Quotienten 1,28036 durch den nächst kleinern Numerus 1,15478, u. s. f. Hiernach wird

$$7{,}2 = 3{,}16228 \times 1{,}77828 \times 1{,}15478 \times \ldots$$

ein Product von Zahlen, deren Logarithmen in der Tabelle enthalten sind. Nach §. 19, 4 ist log 7,2 = log 3,16228 + log 1,77828 + . .

4. Um dieser umständlichen Rechnungen für immer überhoben zu sein, hat man ausführlichere logarithmische Tabellen angefertigt, welche die Mantissen der Logarithmen aller Zahlen bis 999 vierstellig, oder bis 9999 fünfstellig, oder bis 99999 siebenstellig, u. s. f. enthalten**).

I. Wenn der Numerus genauer gegeben ist, als er in der Tabelle

---

*) Diese Methode rührt von Long her, der sich der 10ten Wurzeln bediente (Philos. Trans. 1714 p. 52).

**) Vierstellige Logarithmen von J. H. T. Müller, 5stellige von Houël, 6stellige von Bremiker, 7stellige von Schrön. Um die erste Anfertigung der logarithmischen Tabellen haben sich besondere Verdienste erworben Ursinus, Keppler, Briggs, Vlacq u. A. Vergl. Klügel math. W. 3 p. 530 ff.

verzeichnet steht, so muß die Tabelle interpolirt, d. h. es muß die in der Tabelle enthaltene Mantisse corrigirt werden nach dem Satze:

„Die Mantissendifferenz ist der Numerndifferenz desto genauer proportional, je kleiner das Verhältniß der Numerndifferenz zum Numerus ist.“ Vergl. §. 32 und Algebra §. 2, 4.

Z. B. log 1457 fällt zwischen log 1450 und log 1460, deren Differenz laut Tabelle 30 Zehntausendtel beträgt. Wenn der Numerus um 10, 1, 7 wächst, so wächst der Logarithmus um 30, $\frac{30}{10}$, $\frac{30 \cdot 7}{10}$ Zehntausendtel. Also ist log 1457 = 3,1614 + 0,0021 = 3,1635.

log 14576 wird berichtigt, indem man log 14500 um $\frac{30 \cdot 76}{100}$ Zehntausendtel vermehrt. Ebenso findet man mit Rücksicht auf (1) und (2) log 68,707 = 1,8370; log 0,03754 = 0,5745 — 2.

II. Wenn der Logarithmus einer Zahl gegeben ist, so läßt sich die Zahl aus derselben Tabelle mit bestimmter Genauigkeit angeben.

Z. B. log x = 2,3489. Aus der Kennziffer schließt man, daß x = . . . , . . Die Mantisse fällt laut Tabelle zwischen die Mantissen von log 2230 und log 2240. Wenn die Mantisse um 19, 1, 6 Zehntausendtel wächst, so wächst der Numerus um 10, $\frac{10}{19}$, $\frac{10 \cdot 6}{19}$. Also ist x = 223,3.

log x = 6,1819 giebt x = 1520 000 mit unbestimmten Hunderten.
log x = 0,8362 — 3 giebt x = 0,006858.

Wenn log x = — 5,8794 ist, so macht man durch Addition von 6 die Mantisse positiv und subtrahirt wiederum 6. Aus log x = 0,1206 — 6 findet man dann x = 0,000 001 320. Setzt man log y = 5,8794, so erhält man y = 757 500 und (§. 19, 5) $x = \frac{1}{757\,500}$.

§. 21. Berechnung von Formeln mittelst der Logarithmen.

(Heis §. 59).

1. Zusammengesetztere Formeln werden berechnet, indem man zuerst die Logarithmen derselben und dann die zugehörigen Numern bestimmt. Dieses Verfahren findet am einfachsten bei Producten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln Anwendung (§. 19, 4—6).

28,936 . 0,007803 . 256,84 wird durch folgende Rechnung gefunden:

log 28,..	1,4615
+ log 0,007..	0,8923 — 3
+ log 256,..	2,4096
log Prod.	1,7634
Prod.	58,00.

1,3802 : 73,257 wird wie folgt berechnet:

log 1,3..	0,1399
— log 73,..	1,8648
log Quot.	0,2751 — 2
Quot.	0,01884

Um der Subtraction willen wird 2 im Minuenden addirt und von der Differenz subtrahirt.

$3,428^{27}$ wird wie folgt berechnet:

log 3,..	0,5350 . 27
	10,700
	3 745
log Pot.	14,445
Pot.	279 Billionen.

Größere Genauigkeit wird nur durch genauere Tabellen erreicht.

$\sqrt[7]{0,098756^3}$ wird wie folgt berechnet:

log 0,09 . .	(0,9946—2) . 3
	2,9838—6
	(3,9838—7) : 7
log Wurz.	0,5691—1
Wurz.	$0,3707_5$.

Um der Division willen wird der Subtrahendus (die negative Kennziffer) und der Minuendus um gleichviel vermehrt.

$1,238^{-5}$ wird wie folgt berechnet:

log 1,2..	0,0927 (—5)
	— 0,4635
log Pot.	0,5365 — 1
Pot.	0,3439.

2. Wenn die Logarithmen der Glieder eines Binomium gefunden sind, so läßt sich der Logarithmus des Binomium direct durch die Gauß'sche Hülfstabelle*) ermitteln. Diese Tabelle enthält zu jedem

*) Das Original dieser Tabelle, durch welche ein von Leonelli (Supplément logarithmique 1802) gemachter Entwurf zur Ausführung gelangte, ist in v. Zach's

positiven Werthe von $\log x - \log y$ d. i. $\log \frac{x}{y}$ (Columne A) die zugehörigen Werthe von

$$\log\left(1+\frac{y}{x}\right) \text{ und } \log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$$

(Columne S und U). Der erste dieser Werthe zu $\log x$ addirt giebt $\log (x+y)$, der zweite von $\log x$ subtrahirt giebt $\log (x-y)$. Denn (§. 19)

$$\log (x+y) = \log x\left(1+\frac{y}{x}\right) = \log x + \log\left(1+\frac{y}{x}\right),$$

$$\log (x-y) = \log x\left(1-\frac{y}{x}\right) = \log x - \log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}.$$

Wenn die unter A verzeichneten Zahlen eine von 0 an steigende Reihe bilden, so bilden die unter S und U daneben stehenden Zahlen bis auf 0 fallende Reihen, jene von log 2 ab, diese von ∞ ab. Wenn $\log\frac{x}{y}$ wächst, also auch $\frac{x}{y}$, so fällt $\frac{y}{x}$, also auch $\log\left(1+\frac{y}{x}\right)$; zugleich wächst $1-\frac{y}{x}$, folglich fällt $\log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$. Wenn $\log\frac{x}{y} = 0$ d. h. $\frac{x}{y} = 1$, so ist $\log\left(1+\frac{y}{x}\right) = \log 2$ und $\log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$ unendlich. Ist $\log\frac{x}{y}$ beträchtlich groß, so ist $\frac{x}{y}$ beträchtlich groß, $\frac{y}{x}$ ein kleiner echter Bruch, also sind $\log\left(1+\frac{y}{x}\right)$ und $\log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$ nahe an 0.

Z. B. $\log a = 0{,}3177 - 1$; $\log b = 0{,}17325 - 1$. Die Differenz $\log a - \log b = 0{,}14445$ wird in A aufgesucht; daneben findet man in S oder U die Zahl, welche zu $\log a$ addirt oder von $\log a$ subtrahirt $\log (a+b)$ oder $\log (a-b)$ giebt. Das neben $A = 0{,}144$

---

monatl. Corresp. 1812 Nov. Band 26 p. 498 und in v. Vega's math. Tafeln herausgeg. von Hülße 1840 enthalten. Mit der Gauß'schen Columne B stimmt die Müller'sche Columne S; dagegen giebt die Gauß'sche Tabelle in der Columne C (statt der Müller'schen Columne U) die Werthe von $\log\left(1+\frac{x}{y}\right)$, so daß man in jeder Zeile $C = A + B$ hat.

stehende $S = 0{,}2350$ um $\frac{4 \cdot 45}{100}$ Zehntausendtel und $U = 0{,}5494$ um $\frac{25 \cdot 45}{100}$ Zehntausendtel vermindert giebt die zu $A = 0{,}14445$ gehörigen Werthe $S = 0{,}2348$ und $U = 0{,}5483$, so daß

$$\log(a + b) = 0{,}3177 - 1 + 0{,}2348 = 0{,}5525 - 1,$$
$$\log(a - b) = 0{,}3177 - 1 - 0{,}5483 = 0{,}7694 - 2.$$

Wenn $\log m = -A$, so ist $\log(1 + m) = S$, $\log(1 - m) = -U$.

Berechnung von $\sqrt[16]{\dfrac{43 + 5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}$:

log 43	1,6335	S	0,2453
log 278	2,4440 : 3	log Divd.	1,8788
	0,8147	log 17	1,2304 : 5
log 5	0,6990	log Divs.	0,2461
		log Quot.	1,6327 : 16
log $5\sqrt[3]{}$	1,5137	log Form.	0,10204
A	0,1198	Form.	1,265

Wenn $\log \operatorname{tang}^2 \alpha = c$, $\log \cot^2 \alpha = -c$, so findet man $\log(1 + \cot^2 \alpha)$ d. i. $\log \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$, indem man c unter A aufsucht und den zugehörigen Werth von S nimmt. Bestimmt man α so, daß $\log \operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2} A$, so giebt $-2 \log \sin \alpha$ den zu A gehörigen Werth von S. Demnach konnten Gauß' Hülfstabellen aus den vorhandenen Tabellen der Logarithmen der goniometrischen Functionen abgeleitet werden. Durch die Hülfstabellen ist die sonst übliche Benutzung von sogenannten Hülfswinkeln überflüssig gemacht.

§. 22. Die geometrische Progression. Zusammengesetzte Zinsrechnung und Rentenrechnung.

(Heis §§. 83. 84).

1. Von einer Reihe von Größen sagt man, daß sie eine geometrische Progression bilden, wenn die Verhältnisse der auf einander folgenden Größen einander gleich sind. Ist a das Anfangsglied, v das Verhältniß eines andern Gliedes zum vorhergehenden, so ist die geometrische Progression bis zum $n$ten Gliede folgende:

$$a,\ av,\ av^2,\ av^3,\ .\ .\ ,\ av^{n-1}.$$

Die Progression ist steigend oder fallend, je nachdem das Verhältniß mehr oder weniger als 1 beträgt. Die Glieder der Progression haben abwechselnde Zeichen, wenn das Verhältniß negativ ist.

2. Die Summe der geometrischen Progression ist die Differenz

des überletzten und des Anfangs-Gliedes dividirt durch die Differenz des Verhältnisses und 1. Denn aus

$$s = a + av + av^2 + \ldots + av^{n-1}$$
$$sv = \qquad av + av^2 + \ldots + av^{n-1} + av^n$$

folgt durch Subtraction

$$sv - s = av^n - a$$

$$s = \frac{av^n - a}{v - 1} = \frac{a - av^n}{1 - v}$$

in Uebereinstimmung mit §. 12, 5. Ebendaselbst ist auch die Summe der unendlichen fallenden Progression angegeben:

$$a + av + av^2 + \ldots \text{inf.} = \frac{a}{1 - v},\ v < 1.$$

3. Wenn ein Capital zu p Procent jährlichen Zinsen angelegt ist, und die Zinsen jährlich capitalisirt d. h. zu Vermehrung des Capitals angewandt werden, so bilden die Werthe des Capitals nach 1, 2, 3, .. Jahren eine geometrische Progression, deren Verhältniß $1{,}0p$ d. i. $1 + \frac{p}{100}$. Denn in 1 Jahre wachsen

100 Einheiten	Cap.	zu	100	$+ p$	Einheiten
1	„	„	$1{,}0p$		„
c	„	„	$c \,.\, 1{,}0p$		„

Aus $c \,.\, 1{,}0p$ Einheiten werden wiederum in 1 Jahre $c \,.\, 1{,}0p^2$ Einheiten u. s. f.; also erwachsen aus c Einheiten in 1 Jahre $c \,.\, 1{,}0p$, in 2 Jahren $c \,.\, 1{,}0p^2$, in 3 Jahren $c \,.\, 1{,}0p^3$, .., in n Jahren $c \,.\, 1{,}0p^n$ Einheiten.

Wenn das Capital noch einen Theil eines Jahres angelegt ist, z. B. im Ganzen $n + r$ Jahr, wovon $r < 1$, so erhalten während des letzten Zeitraums 100 Einheiten den Werth von $100 + pr$ Einheiten. Demnach hat das Capital c nach $n + r$ Jahren den Werth

$$c \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{pr}{100}\right).$$

Wenn dagegen die Zinsen nach jedem $m$ten Theile eines Jahres capitalisirt werden, so nehme man den $m$ten Theil des Jahres als Zeiteinheit und vertausche p mit $p : m$. Das Capital c hat nach 1, 2, 3, .. Zeiteinheiten die Werthe

$$c\left(1 + \frac{p}{100m}\right),\quad c\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^2,\quad c\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^3,\ \ldots$$

4. Mit Hülfe der gefundenen Formeln werden die Aufgaben der zusammengesetzten Zinsrechnung gelöst: den Werth anzugeben, welchen ein Capital bei gegebener Verzinsung nach oder vor gegebener

Zeit hat; die Zeit anzugeben, in welcher ein Capital bei gegebener Verzinsung einen bestimmten Werth erhalten hat; die Verzinsung anzugeben, durch welche ein Capital in gegebener Zeit einen bestimmten Werth erreicht.

Wenn das Capital c nach $n + r$ Jahren bei jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu p Procent den Werth k hat, vorausgesetzt daß n ganz und r echt gebrochen, so hat man (3)

$$k = c.\ 1{,}0p^{n}\left(1 + \frac{pr}{100}\right),\quad c = \frac{k}{1{,}0p^{n}\left(1 + \frac{pr}{100}\right)},$$

$$1{,}0p^{n}\left(1 + \frac{pr}{100}\right) = \frac{k}{c}.$$

Die Formeln für k und c sind zu logarithmischer Berechnung bequem. Zur Berechnung von n und r nimmt man die Logarithmen beider Seiten der dritten Gleichung und erhält

$$n \log 1{,}0p + \log\left(1 + \frac{pr}{100}\right) = \log \frac{k}{c}.$$

Hiernach erscheint n als ganze Zahl des Quotienten $\log \frac{k}{c} : \log 1{,}0p$ und $\log\left(1 + \frac{pr}{100}\right)$ als Rest der Division. Setzt man den Rest $=$ $\log 1{,}0s$, so findet man $1 + \frac{pr}{100} = 1{,}0s$ und $r = \frac{s}{p}$.

Beispiel. Vor wieviel Jahren hatten 5326,4 Thlr. Capital den Werth 5000 Thlr. bei jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu 6 Procent? Die Berechnung ist folgende:

$\log k$	3,7264
$\log c$	3,6990
	(log 1,0p)
$\log \frac{k}{c}$	0,0274 : 0,0253 = 1
	253
$\log (1 + ..)$	0,0021
$1 + pr : 100$	1,005
r	0,5 : 6 $= \frac{1}{12}$

Die gesuchte Zeit beträgt $1\frac{1}{12}$ Jahr.

Zur genauen Berechnung von p hat man nur in dem Falle $r = 0$

$$1{,}0p = \sqrt[n]{\frac{k}{c}}.$$

Wenn r nicht verschwindet, so dient der ebenso berechnete Werth von $1{,}0p$ zur Grundlage einer Annäherung.

5. Wenn von dem Capital c (Mise) nach jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu p Procent jährlich das Capital r (Rente) weggenommen wird, so bleibt in der Casse

nach 1 Jahr $c \,.\, 1{,}0p - r$

" 2 " $c \,.\, 1{,}0p^2 - r \,.\, 1{,}0p - r$

" 3 " $c \,.\, 1{,}0p^3 - r \,.\, 1{,}0p^2 - r \,.\, 1{,}0p - r$

. . . .

" n " $c \,.\, 1{,}0p^n - r \,.\, 1{,}0p^{n-1} - r \,.\, 1{,}0p^{n-2} - .. - r \,.\, 1{,}0p - r.$

Die Subtrahenden bilden eine geometrische Progression, durch deren Summirung als Cassenbestand nach n Jahren erhalten wird

$$c \,.\, 1{,}0p^n - r\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}$$

$$= \frac{100r}{p}\left\{1 - 1{,}0p^n\left(1 - \frac{cp}{100r}\right)\right\} = \frac{100r}{p}\left\{1{,}0p^n\left(\frac{rp}{100r} - 1\right) + 1\right\}.$$

Wenn jährlich das Capital r hinzugefügt wird, so ist das nach n Jahren angehäufte Capital

$$\frac{100r}{p}\left\{1{,}0p^n\left(\frac{cp}{100r} + 1\right) - 1\right\}.$$

Beispiel. $c = 10\,000$ Gulden, $p = 5$, $r = 800$ Gulden, $n = 10$.

$\log \frac{100r}{p}$	4,2041	$\log 1{,}0p^n$	0,2119
$\log c$	4,0000	$\log 1{,}0p^n(..)$	$-$ 0,2141 ($-A$)
$\log \frac{cp}{100r}$	$-$ 0,2041 ($-A$)	$\log [1 - ..]$	$-$ 0,4098 ($-U$)
$\log (1 - ..)$	$-$ 0,4260 ($-U$)	log Form.	3,7943
		Form.	6227.

Anmerkung. Wenn bei jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu p Procent nach jedem $m$ten Theile eines Jahres die Rente ϱ gezahlt wird, so ist zur Berechnung des Cassenbestands nach n Jahren zu untersuchen, welche Rente am Schlusse eines Jahres statt der einzelnen während des Jahres fälligen Renten gezahlt werden kann. Statt 100 Einheiten hat man aber $\frac{t}{m}$ Jahr später $100 + \frac{pt}{m}$ Einheiten zu zahlen, für 1 Einheit den 100ten Theil, für ϱ Einheiten ϱmal soviel d. i. $\varrho\left(1 + \frac{pt}{100m}\right)$ Einheiten. Statt der einzelnen Renten während eines Jahres ist also am Schlusse des Jahres die Rente

$$\varrho\left(1 + \frac{p(m-1)}{100m}\right) + \varrho\left(1 + \frac{p(m-2)}{100m}\right) + .. + \varrho\left(1 + \frac{p}{100m}\right) + \varrho$$

zu zahlen. Nun ist die doppelte Summe

$$\begin{array}{l} (m-1)+(m-2)+\ldots+2\quad+1 \\ \;\;1\quad+\quad2\quad+\ldots+(m-2)+(m-1) \end{array}$$

$= m(m-1)$, folglich

$$(m-1)+(m-2)+\ldots+2+1=\tfrac{1}{2}\,m(m-1)$$

also hat die gesuchte Rente den Werth $\varrho\left(m+\frac{m-1}{200}p\right)$. Nachdem man diesen Werth an die Stelle von r gesetzt hat, berechnet man den Cassenbestand wie oben.

6. Indem man den gefundenen Cassenbestand $= 0$ setzt, so erhält man die Rentengleichung, welche die Aufgaben der Rentenrechnung löst: die Mise anzugeben, welche bei gegebener Verzinsung durch eine bestimmte Rente aufgezehrt wird; die Rente anzugeben, durch die bei gegebener Verzinsung in bestimmter Zeit eine gegebene Mise aufgezehrt wird; die Dauer einer Rente anzugeben, durch die bei gegebener Verzinsung eine bestimmte Mise aufgezehrt wird; die Verzinsung anzugeben, bei der eine bestimmte Mise durch eine gegebene Rente aufgezehrt wird.

I. und II. Wenn die Mise c durch die $n$jährige Rente r bei jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu p Procent aufgezehrt wird, so hat man (5) nach Division durch $1{,}0p^n$

$$c=\frac{100r}{p}(1-1{,}0p^{-n}),\quad r=\frac{cp}{100(1-1{,}0p^{-n})}.$$

Beispiel 1. $r = 800$; $p = 3{,}5$; $n = 20$.

$\log\frac{100r}{p}$	4,3590
$\log 1{,}0p^{-n}$	$-$ 0,2988 ($-A$)
$\log(1-..)$	$-$ 0,3033 ($-U$)
$\log c$	4,0557; $c = 11370$.

Beispiel 2. $c = 20000$; $p = 3$; $n = 10$.

$\log\frac{pc}{100}$	2,7782
$\log 1{,}0p^{-n}$	$-$ 0,1284 ($-A$)
$\log\frac{1}{1-..}$	0,5918 (U)
$\log r$	3,3700; $r = 2344$.

III. Wenn aus der Mise, der Verzinsung und der Rente die Dauer derselben zu berechnen ist, so giebt man der Rentengleichung die Gestalt

$$1{,}0p^n\left(1-\frac{cp}{100r}\right)=\frac{1}{\alpha},\quad \alpha\,.\,1{,}0p^n=\frac{1}{1-\frac{cp}{100r}},$$

weil n unter den gemachten Voraussetzungen nur eine ganze Zahl sein kann. Zur Bestimmung von n und α hat man

$$n \log 1{,}0p + \log \alpha = \log \frac{1}{1 - \frac{cp}{110r}}.$$

Demnach ist n die ganze Zahl des Quotienten $\log \frac{1}{1 - ..} : \log 1{,}0p$ und $\log \alpha$ der Rest dieser Division. Nach $n$maliger Auszahlung der Rente r bleibt der Cassenbestand $\frac{100r}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Beispiel. $c = 20000$; $p = 3{,}5$; $r = 1200$.

$\log \frac{100r}{p}$	4,5351
$\log c$	4,3010
$\log \frac{cp}{100r}$	— 0,2341 (—A)
$\log \frac{1}{1 - ..}$	0,3803 (U) : 0,01494 = 25 (log 1,0p)
	2988
	815
	747
$\log \alpha$	0,0068 (A)
$\log \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$	— 1,81 (—U)
$\log \frac{100r}{p}(..)$	2,72 = log 530.

Die Rente dauert 25 Jahre und läßt dann den Cassenbestand 530.

IV. Aus der Mise, der Rente und ihrer Dauer kann die Verzinsung im Allgemeinen nicht berechnet werden. Denn die Rentengleichung (I)

$$\frac{100}{p}(1 - 1{,}0p^{-n}) = \frac{c}{r}$$

oder, nachdem man $\frac{1}{1{,}0p} = x$, $\frac{100}{p} = \frac{x}{1-x}$ substituirt hat,

$$x\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{c}{r}$$

ist vom $n$ten Grade, weil $1 - x^n$ durch $1 - x$ theilbar ist. Eine Gleichung dieser Art kann aber annäherungsweise aufgelöst werden, wenn

bestimmte Werthe von c, r, n gegeben sind (Algebra §. 8). In jedem besondern Falle wird dann p so begrenzt, daß

$$\log \frac{100r}{c} + \log \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{p} = 0.$$

§. 23. Potenzen der Binomien mit positiven ganzen Exponenten.

1. Weil $(a+b)^m = \left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, so kommt es zunächst darauf an, die $m$te Potenz eines Binomium zu entwickeln, dessen erstes Glied 1 und dessen zweites Glied ein echter Bruch ist. Durch Multiplication findet man

$(1+x)^2 = (1+x)(1+x)$, $(1+x)^3 = (1+x)^2(1+x)$, . .

$$\begin{array}{rl}
(1+x)^2 = & 1 + 2x + x^2 \\
(1+x)^3 = & 1 + 2x + x^2 \\
 & \quad + \;\; x + 2x^2 + x^3 \\ \hline
 & 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\
(1+x)^4 = & 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\
 & \quad + \;\; x + 3x^2 + 3x^3 + x^4 \\ \hline
 & 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4
\end{array}$$

u. s. w., also eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe. Die Coefficienten (§. 3) der einzelnen Potenzen von x heißen **Binomialcoefficienten**, der 0te, 1te, 2te, . . bei der $m$ten Potenz des Binomium. Diese sind bei der 2ten, 3ten, 4ten Potenz

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1 u. s. f.

Aus der obigen Rechnung folgt, daß die Binomialcoefficienten bei der 5ten Potenz Summen von je zwei folgenden Binomialcoefficienten bei der 4ten Potenz sind, u. s. f.*) Um aber die Binomialcoefficienten bei einer Potenz unabhängig von den Binomialcoefficienten bei niederen Potenzen zu finden, muß man dieselben durch den Exponenten der Potenz ausdrücken. In der That ist bei der 4ten Potenz des Binomium

$$4 = 4, \quad 6 = 4.\tfrac{3}{2}, \quad 4 = 4.\tfrac{3}{2}.\tfrac{2}{3},$$

bei der 5ten Potenz

---

*) Eine so construirte Tabelle der Binomialcoefficienten (triangulus arithmeticus nach Pascal) findet sich bereits bei Stifel arithm. 1544 fol. 44.

$$5 = 5,\quad 10 = 5.\tfrac{4}{2},\quad 10 = 5.\tfrac{4}{2}.\tfrac{3}{3},\quad 5 = 5.\tfrac{4}{2}.\tfrac{3}{3}.\tfrac{2}{4}.$$

Danach ist zu prüfen, ob bei der $m$ten Potenz die Binomialcoefficienten*)

$$1,\quad m,\quad \frac{m(m-1)}{1.2},\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},\ldots$$

sich ergeben, so daß man hätte:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

2. Die Zahlen

$$1,\quad m,\quad \frac{m(m-1)}{1.2},\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},\ldots$$

werden der Reihe nach durch

$$\binom{m}{0},\ \binom{m}{1},\ \binom{m}{2},\ \binom{m}{3},\ldots$$

bezeichnet. Die Formel $\binom{m}{k}$, zu lesen m über k, bedeutet das Product von k Factoren, die von m in natürlicher Reihe absteigen, dividirt durch das Product von k Factoren, die von 1 aufsteigen,

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}$$

und ist eine ganze Zahl (§. 13, 13). Die Formel $\binom{m}{m}$ hat den Werth 1, während $\binom{m}{m+1}, \binom{m}{m+2},\ldots$ verschwinden, weil in ihren Zählern der Factor 0 vorkommt.

Wenn man mit $1.2\ldots(m-k)$ den Zähler und den Nenner des obigen Bruches multiplicirt, so erhält man im Zähler das Product aller Zahlen von 1 bis m, folglich auch

$$\binom{m}{k} = \frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots k.1.2\ldots(m-k)}$$

woraus unmittelbar erhellt, daß

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

---

*) Die Bildung der Binomialcoefficienten aus dem Exponenten war durch die von Fermat und Pascal erfundenen Formeln der figurirten Zahlen vorbereitet. Vergl. Fermat's Brief an Roberval 1636 Nov. 4 und Oeuvres de Pascal ed. Lahure 1858, II. p. 443. 452. 403. Die Binomialcoefficienten und das Binomialtheorem für positive ganze sowie für beliebige reale Exponenten hat Newton erfunden und in den Briefen an Oldenburg 1676 Juni 13 und Oct. 24 mitgetheilt. Die Bezeichnung $\binom{m}{k}$ kommt zuerst in nachgelassenen Abhandlungen Euler's vor Acta Petrop. V, 1 p. 89 und V, 2 p. 76. Nov. Act. V p. 52.

Z. B. $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} = 495.$

3. Die Formel $\binom{m}{k}$ hat die Eigenschaft, daß

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$$

Beweis. $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\,..\,(m-k+1)}{1.2\ldots k} = \binom{m}{k-1}\frac{m-k+1}{k}$,
folglich ist

$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m}{k-1}\left(\frac{m-k+1}{k}+1\right)=\binom{m}{k-1}\frac{m+1}{k}=\binom{m+1}{k}.$$

4. Die Formel $\binom{m}{k}$ ist der $k$te Binomialcoefficient bei der $m$ten Potenz eines Binomium, so daß

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots + \binom{m}{m}x^m.$$

(Newton's Binomialtheorem, binomischer Lehrsatz.)

Beweis. Wenn für einen bestimmten Werth von m

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots$$

ist, so findet man

$$\begin{aligned}(1+x)^{m+1} &= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots\\ &\quad + \quad x + \binom{m}{1}x^2 + \binom{m}{2}x^3 + \ldots\\ &= 1 + \binom{m+1}{1}x + \binom{m+2}{2}x^2 + \binom{m+1}{3}x^3 + \ldots,\end{aligned}$$

weil $\binom{m}{1} + 1 = \binom{m+1}{1}$, $\binom{m}{2} + \binom{m}{1} = \binom{m+1}{2}, \ldots$ (3). Nun ist aber

$$(1+x)^3 = 1 + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3,$$

wie sich durch Vergleichung dieser Formel mit der in (1) gefundenen ergiebt, also ist auch

$$(1+x)^4 = 1 + \binom{4}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^3 + \binom{4}{4}x^4,$$

$$(1+x)^5 = 1 + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5,$$

. . . .

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots + \binom{m}{m}x^m$$

für jede positive ganze Zahl m *).

Anmerkung. Wenn man x mit $-x$ vertauscht, so bleiben x^2, x^4, . . unverändert, während x^3, x^5, . . in $-x^3$, $-x^5$, . . übergehen. Daher ist

$$(1 - x)^m = 1 - \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 - \binom{m}{3}x^3 + \ldots$$

Wenn $x = \frac{b}{a}$, so ist (1)

$$(a + b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{1}ab^{m-1} + b^m,$$

weil

$$a^m\frac{b}{a} = a^{m-1}b, \quad a^m\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^m b^2}{a^2} = a^{m-2}b^2, \text{ u. s. f.}$$

$$\binom{m}{m} = 1, \binom{m}{m-1} = \binom{m}{1}, \ldots (2).$$

5. Wenn x ein echter Bruch ist, so wird in der für $(1 + x)^m$ gefundenen Reihe von einem bestimmten Gliede an jedes Glied kleiner als das ihm vorausgehende. Denn das Verhältniß des $(k + 2)$ten Gliedes zum $(k + 1)$ten ist

$$\binom{m}{k+1}x^{k+1} : \binom{m}{k}x^k = \frac{m-k}{k+1}x < 1,$$

sobald k eine bestimmte Grenze überschreitet. Der Fehler, welchen man begeht, indem man von einem bestimmten Gliede an die folgenden Glieder vernachlässigt, läßt sich in jedem gegebenen Falle abschätzen. Setzt man z. B.

$$(1 + x)^m = 1 + mx,$$

so ist der Fehler

$$f = \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots + \binom{m}{m}x^m$$

$$= \binom{m}{2}x^4\left(1 + \frac{m-2}{3}x + \frac{m-2}{3}\,\frac{m-3}{4}\,x^2 + \ldots\right)$$

*) Die hier angewandte Methode der Induction (Ableitung einer allgemeinen Regel aus einem besondern Falle) ist von Jac. Bernoulli (Acta Erud. 1686 p. 360) angegeben worden, und heißt der Schluß von m auf $m + 1$.

$$< \binom{m}{2} x^2 \left\{1 + \frac{m-2}{3} x + \left(\frac{m-2}{3} x\right)^2 + \ldots\right\},$$

weil die Factoren $\frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \ldots$ geringer sind als $\frac{m-2}{3}$. Nun ist

$$1 + \frac{m-2}{3} x + \left(\frac{m-2}{3} x\right)^2 + \ldots < \frac{1}{1 - \frac{m-2}{3} x}$$

(§. 12, 5) unter der Voraussetzung, daß $\frac{m-2}{3} x < 1$, folglich

$$f < \binom{m}{2} \frac{x^2}{1 - \frac{m-2}{3} x}.$$

Setzt man ebenso

$$(1 - x)^m = 1 - mx,$$

so ist der Fehler

$$f = \binom{m}{2} x^2 - \left\{\binom{m}{3} x^3 - \binom{m}{4} x^4\right\} - \left\{\binom{m}{5} x^5 - \binom{m}{6} x^6\right\} - \ldots$$

$$< \binom{m}{2} x^2, \text{ wenn } \frac{m-3}{4} x < 1.$$

Analog kann bei hinreichend kleinem Verhältniß $b : a$

$$(a + b)^m = a^m + m a^{m-1} b$$

gesetzt werden mit der Fehlergrenze

$$\binom{m}{2} \frac{a^{m-2} b^2}{1 - \frac{m-2}{3} \frac{b}{a}},$$

und $(a - b)^m = a^m - m a^{m-1} b$ mit der Fehlergrenze $\binom{m}{2} a^{m-2} b^2$.

6. Die $m$ten Wurzeln der Zahlen c, $c . 2^m$, $c . 3^m$, .. verhalten sich zu einander wie 1, 2, 3, ... Unter diesen Radicanden empfiehlt sich zur Berechnung seiner $m$ten Wurzel ein solcher, der von einer $m$ten Potenz sich nur wenig unterscheidet, z. B. $a^m \pm b$, wenn $b : a^m = h$ ein kleiner echter Bruch ist. Dann hat man

$$\sqrt[m]{a^m \pm b} = a \sqrt[m]{1 \pm h},$$

und zwar ist

$$\sqrt[m]{1 \pm h} < 1 \pm \frac{h}{m}$$

weil nach (5)

$$\left(1+\frac{h}{m}\right)^{m} = 1 \pm h + \ldots > 1 \pm h.$$

Zu genauerer Bestimmung setze man $\sqrt[m]{1+h} = 1 + x$, folglich

$$(1+x)^{m} = 1 + h,$$

$$mx + \binom{m}{2} x^{2} = h - \binom{m}{3} x^{3} - \ldots$$

$$x = \frac{h - \binom{m}{3} x^{3} - \ldots}{m + \binom{m}{2} x} > \frac{h - \binom{m}{3}\left(\frac{h}{m}\right)^{3} - \ldots}{m + \binom{m}{2}\frac{h}{m}}$$

weil $x < h : m$, so daß

$$\sqrt[m]{a^{m} + b} = a + ax > a + \frac{ab - \frac{m-1}{2m}\,\frac{m-2}{3m}\,\frac{b^{3}}{a^{2m-1}} - \ldots}{ma^{m} + \frac{1}{2}(m-1)b}$$

Zugleich hat man

$$\frac{2x}{m-1} + x^{2} = \frac{2h}{m(m-1)} - \frac{m-2}{3} x^{3} - \ldots$$

$$x = -\frac{1}{m-1} + \sqrt{\frac{1}{(m-1)^{2}} + \frac{2h}{m(m-1)} - \frac{m-2}{3} x^{3} - \ldots}$$

$$\sqrt[m]{a^{m} + b} = a + ax < \frac{m-2}{m-1} a + \sqrt{\left(\frac{a}{m-1}\right)^{2} + \frac{2b}{m(m-1)a^{m-2}}}$$

Die rationale untere Grenze und mehr noch die irrationale obere Grenze bestimmen die Wurzel mit großer Genauigkeit. Wenn b, h, x negativ sind, so giebt die rationale Formel eine obere, die irrationale eine untere Grenze der Wurzel*).

§. 24. Permutationen gegebener Elemente.

1. Unter Elementen werden hier Dinge (Individuen) verstanden, welche nur durch Ordnungszahlen (Numern, Buchstaben) unterschieden sind und deren Qualität und Quantität dahin gestellt bleibt.

---

*) Lagny Méth. nouv. pour l'extraction . . Paris 1692. Halley Philos. Trans. 1694 p. 136. Lambert Beiträge II, 1 p. 152. Allgemeinere Untersuchungen über solche Annäherungen findet man bei Euler Nov. Comm. Petrop. 18 p. 136.

Von zwei Elementen heißt dasjenige das **höhere**, welches die größere Ordnungszahl hat.

Unter einer **Complexion** gegebener Elemente wird ein Verein derselben nach irgend welcher Reihenfolge verstanden, wobei die Art der Verbindung dahin gestellt bleibt. **Permutationen** gegebener Elemente heißen alle die Complexionen derselben, welche sich durch die Anordnung der Elemente unterscheiden.

2. Bei n verschiedenen Elementen sind $1.2.3\ldots n$ Permutationen möglich.

Beweis. Zu dem 1ten, 2ten, 3ten, . . Element kann jede Permutation der $n-1$ übrigen Elemente gesetzt werden, folglich giebt es von n verschiedenen Elementen $n$mal soviel Permutationen, als von $n-1$ Elementen. Nun giebt es von 2 Elementen 1.2 Permutationen (ab und ba), also von 3 Elementen 1.2.3 Permutationen, von 4 Elementen 1.2.3.4 Permutationen, u. s. w.

3. Man findet die Permutationen von 3 Elementen, indem man zu dem Element 1 die Permutationen der Elemente 2, 3, dann zu 2 die Permutationen von 1, 3, dann zu 3 die Permutationen von 1, 2 setzt:

1 2 3	2 1 3	3 1 2
1 3 2	2 3 1	3 2 1

Man findet die Permutationen von 4 Elementen, indem man zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4, zu 2 die Permutationen von 1, 3, 4, zu 3 die Permutationen von 1, 2, 4, und zu 4 die Permutationen von 1, 2, 3 setzt:

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
. . .	. . .	. . .	. . .
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Man findet die Permutationen von 5 Elementen, indem man zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4, 5 setzt, zu 2 die Permutationen von 1, 3, 4, 5, u. s. f.

1 2 3 4 5	2 1 3 4 5	3 1 2 4 5
. . . .	. . . .	. . . .
1 5 4 3 2	2 5 4 3 1	3 5 4 2 1
4 1 2 3 5	5 1 2 3 4	
. . . .	. . . .	
4 5 3 2 1	5 4 3 2 1	

u. s. f. Ueberhaupt verliert bei dieser Methode ein Element seinen Platz erst dann, wenn die Ordnungszahlen der folgenden Elemente eine fallende Reihe bilden. Das Element weicht dem nächst höhern aus der

Reihe der folgenden Elemente, und die übrigen Elemente werden so hinzugefügt, daß ihre Ordnungszahlen eine steigende Reihe bilden.

4. Aus einer Complexion können nach und nach alle Permutationen durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden*).

Bei 3 Elementen ergiebt sich folgende Reihenfolge der Permutationen, wenn man nach und nach 3 mit 2, 2 mit 1, 1 mit 3, 3 mit 2, 2 mit 1 vertauscht:

1 2 3	2 3 1	3 1 2
1 3 2	2 1 3	3 2 1

Indem man zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4 setzt, dann 1 mit 2 vertauscht und die folgenden Elemente versetzt, dann 2 mit 3, 3 mit 4 vertauscht und jedesmal die folgenden Elemente versetzt, findet man für 4 Elemente:

1 2 3 4	2 4 3 1	3 1 2 4	4 3 2 1
. . .	. . .	. . .	. . .
1 4 3 2	2 1 3 4	3 4 2 1	4 1 2 3

Für 5 Elemente:

1 2 3 4 5	2 5 1 3 4	3 4 5 1 2	4 2 3 5 1	5 1 2 3 4
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
1 5 2 3 4	2 4 5 1 3	3 2 4 5 1	4 1 2 3 5	5 4 1 2 3

Für 6 Elemente:

1 2 3 4 5 6	2 6 5 1 3 4	3 4 2 6 5 1
. . . . .	. . . . .	. . . . .
1 6 5 2 3 4	2 4 3 6 5 1	3 1 5 4 2 6
4 1 5 3 2 6	5 6 2 1 4 3	6 3 4 5 2 1
. . . . .	. . . . .	. . . . .
4 6 2 1 5 3	5 3 4 6 2 1	6 1 2 3 4 5

u. s. f. für mehr Elemente.

5. Irgend zwei Elemente einer Complexion bilden eine Inversion (dérangement, variation), wenn das voranstehende Element des Paares höher ist als das nachstehende Element. Z. B. die Complexion 2431 enthält 4 Inversionen: 21, 43, 41, 31.

Die Anzahl der in einer Complexion vorhandenen Inversionen ändert sich durch Vertauschung von zwei Elementen um eine ungerade Zahl.

---

*) Gallenkamp Elem. d. Math. 1850 §. 110.

Beweis. Sind g und h die zu vertauschenden Elemente, h höher als g; A, B, C die Gruppen der Elemente, welche in der gegebenen Complexion durch g und h getrennt sind, so ist die Differenz der Anzahlen von Inversionen, welche in $AgBhC$ und $AhBgC$ vorhanden sind, gleich der Differenz der Anzahlen von Inversionen, die in gBh und hBg anzutreffen sind. Die Complexion B enthalte α Elemente, davon β höher als g, γ höher als h, so sind in der Complexion gBh außer den Inversionen, welche B selbst enthält, noch $\alpha - \beta + \gamma$ Inversionen vorhanden, weil g höher als $\alpha - \beta$ Elemente in B, und weil γ Elemente in B höher sind als h. Dagegen sind in hBg außer den Inversionen, welche B enthält, noch $\alpha - \gamma + 1 + \beta$ Inversionen vorhanden, weil h höher ist als $\alpha - \gamma$ Elemente in B, weil h höher ist als g, und weil β Elemente in B höher sind als g. Die Differenz dieser Anzahlen

$$\alpha - \gamma + 1 + \beta - (\alpha - \beta + \gamma) = 2\beta - 2\gamma + 1$$

ist ungerade.

6. Wenn man die Permutationen verschiedener Elemente durch Vertauschung von jedesmal zwei Elementen entwickelt (4), so sind die in den aufeinander folgenden Permutationen vorhandenen Inversionen abwechselnd von gerader und ungerader Anzahl (5). Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es ebensoviel gerade Permutationen (mit gerader Anzahl von Inversionen), als ungerade Permutationen (mit ungerader Anzahl von Inversionen).

§. 25. Variationen und Combinationen gegebener Elemente.

(Heis §. 88 ff.).

1. Variationen $k$ter Classe von gegebenen Elementen heißen die Complexionen von je k aus der Reihe der gegebenen Elemente. Die Variationen $n$ter Classe von n Elementen sind von den Permutationen derselben nicht verschieden. Variationen $(n+1)$ter Classe von n Elementen können nicht gebildet werden.

Die Complexionen, welche je k der gegebenen Elemente enthalten, von denen aber nicht zwei aus denselben k Elementen gebildet sind, heißen die Combinationen $k$ter Classe der gegebenen Elemente. Die Combinationen 1ter, 2ter, 3ter, . . Classe werden auch Unionen, Binionen (Amben), Ternionen (Ternen), . . genannt.

2. Von n Elementen giebt es

$$n(n-1)\,..\,(n-k+1) \text{ Variationen } k\text{ter Classe,}$$

$$\frac{n(n-1)..(n-k+1)}{1.2..k} = \binom{n}{k} \text{ Combinationen } k\text{ter Classe.}$$

Beweis. Um aus den Variationen $k$ter Classe die Variationen $(k+1)$ter Classe zu bilden, setze man zu jeder Variation jedes Element, das sie noch nicht enthält. Man erhält also $(n-k)$mal soviel Variationen $(k+1)$ter Classe als $k$ter Classe. Nun giebt es n Variationen 1ter Classe, folglich $n(n-1)$ Variationen 2ter Classe, $n(n-1)(n-2)$ Variationen 3ter Classe, u. s. f.

Die Variationen $k$ter Classe lassen sich in Gruppen so vertheilen, daß die Variationen jeder Gruppe Permutationen derselben k Elemente sind. Da zu jeder Gruppe $1.2...k$ Variationen gehören (§. 24, 2), so giebt es den $(1.2...k)$ten Theil so viel Gruppen als Variationen $k$ter Classe. Jeder Gruppe entspricht eine Combination $k$ter Classe.

Die in §. 23 gebrauchte Formel $\binom{n}{k}$ ist als Anzahl von Combinationen eine ganze Zahl. Weil

$$\binom{n}{k} = \frac{1.2...n}{1.2...k.1.2...(n-k)} = \binom{n}{n-k}$$

so giebt es von n Elementen ebensoviel Combinationen $k$ter als $(n-k)$ter Classe.

3. Man findet die Variationen 2ter Classe, indem man zu jedem Element der Reihe nach jedes andere setzt; 3ter Classe, indem man zu jedem Element die Variationen 2ter Classe der übrigen Elemente setzt; 4ter Classe, indem man zu jedem Element die Variationen 3ter Classe der übrigen Elemente setzt, u. s. w.

Für 5 Elemente:

1 2	2 1	3 1	4 1	5 1
1 3	2 3	3 2	4 2	5 2
1 4	2 4	3 4	4 3	5 3
1 5	2 5	3 5	4 5	5 4

1 2 4	2 1 3	3 1 2	4 1 2	5 1 2
1 2 3	2 1 4	3 1 4	4 1 3	5 1 3
. .	. .	. .	. .	. .
1 5 4	2 5 4	3 5 4	4 5 3	5 4 3 u. s. f.

Man findet die Combinationen 2ter Classe, indem man zu jedem Element der Reihe nach jedes höhere setzt; 3ter Classe, indem man zu jedem Element die Combinationen 2ter Classe aus den höhern Elementen

setzt; 4ter Classe, indem man zu jedem Element die Combinationen 3ter Classe aus den höhern Elementen setzt, u. s. w.

Für 6 Elemente:

	1 2	2 3	3 4	4 5	5 6	
	1 3	2 4	3 5	4 6		
	1 4	2 5	3 6			
	1 5	2 6				
	1 6					
1 2 3	1 3 4	1 4 5	1 5 6	2 3 4	2 4 5	2 5 6
1 2 4	1 3 5	1 4 6		2 3 5	2 4 6	
1 2 5	1 3 6			2 3 6		
1 2 6						

3 4 5	3 5 6	4 5 6
3 4 6		

1 2 3 4	2 3 4 5	3 4 5 6
. . .	. . .	
1 4 5 6	2 4 5 6	

Ueberhaupt behält bei der Aufstellung von Combinationen jedes Element seinen Platz so lange, bis daß die folgenden Elemente durch höhere nicht mehr ersetzt werden können. Dann weicht das Element dem nächsthöhern Elemente, und die nächsthöhern Elemente folgen.

4. Wenn unter den gegebenen n Elementen p einander gleich sind, wenn ferner unter den übrigen Elementen q einander gleich sind, wenn unter den übrigen Elementen wiederum r einander gleich sind, u. s. f., so giebt es

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r\ldots}$$

Permutationen der Elemente*).

Beweis. Man kann n Plätze mit den p gleichen Elementen auf $\binom{n}{p}$ verschiedene Arten besetzen. Die jedesmal übrigen $n-p$ Plätze können mit den q gleichen Elementen auf $\binom{n-p}{q}$ verschiedene Arten besetzt werden; die jedesmal übrigen $n-p-q$ Plätze können wieder mit den r gleichen Elementen auf $\binom{n-p-q}{r}$ verschiedene Arten besetzt werden; die jedesmal übrigen s Plätze können endlich mit ebensoviel

*) Frénicle Abrégé des combin. 1676 (Anc. Mém. de Paris t. V). Wallis Combin 1685. c. 2.

ungleichen Elementen auf 1 . 2 . . . s verschiedene Arten (§. 24, 2) besetzt werden. Die Austheilung der Plätze an die gegebenen Elemente kann demnach auf

$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{q}\binom{n-p-q}{r}.1.2\ldots s=\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r}$$

verschiedene Arten erfolgen.

5. Die Combinationen $k$ter Classe von n Elementen enthalten entweder das $n$te Element nicht, oder sie enthalten dasselbe. Die erste Gruppe umfaßt die Combinationen $k$ter Classe der ersten $n - 1$ Elemente, die zweite Gruppe umfaßt die Combinationen $(k-1)$ter Classe dieser Elemente, denen das $n$te Element zugesetzt wird. Also ist

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

wie §. 23, 3 arithmetisch bewiesen worden ist.

Die Combinationen $k$ter Classe von n Elementen endigen entweder mit dem $k$ten Element, oder mit dem $(k+1)$ten Element, oder mit dem $(k+2)$ten Element, u. s. w. Nun endigen mit dem $(k+m)$ten Element soviel Combinationen $k$ter Classe, als es Combinationen $(k-1)$ter Classe der ersten $k+m-1$ Elemente giebt. Also ist

$$\binom{n}{k}=\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+\binom{k+1}{k-1}+\ldots+\binom{n-1}{k-1}.$$

Durch fortgesetzte Zerlegungen dieser Art erkennt man, daß $\binom{n}{k}$ eine Summe von ganzen Zahlen, folglich eine ganze Zahl ist.

Die Combinationen $k$ter Classe von $u+v$ Elementen enthalten entweder k Elemente des Systems von u Elementen, oder $k-1$ Elemente dieses Systems und 1 Element des Systems von v Elementen, oder $k-2$ Elemente des ersten Systems und 2 Elemente des zweiten Systems, u. s. w. Nun können $k-m$ Elemente des ersten Systems mit m Elementen des zweiten Systems auf $\binom{u}{k-m}\binom{v}{m}$ verschiedene Arten combinirt werden. Also ist*)

$$\binom{u+v}{k}=\binom{u}{k}+\binom{u}{k-1}\binom{v}{1}+\binom{u}{k-2}\binom{v}{2}+\ldots+\binom{u}{1}\binom{u}{k-1}+\binom{v}{k}.$$

6. Wenn jedes der n Elemente beliebig oft gesetzt werden kann, so giebt es von denselben

n^k Variationen $k$ter Classe,

---

*) Euler. Vergl. die Anmerkung zu §. 23, 1.

$$\binom{n+k-1}{k} \text{ Combinationen } k\text{ter Classe.}$$

Beweis. Um aus den Variationen $k$ter Classe die Variationen $(k+1)$ter Classe zu bilden, setze man zu jeder Variation jedes Element. Man erhält also $n$mal so viel Variationen $(k+1)$ter Classe als $k$ter Classe. Nun giebt es n Variationen 1ter Classe, folglich giebt es n^2 Variationen 2ter Classe, n^3 Variationen 3ter Classe u. s. w.

Um aus den Combinationen $k$ter Classe von der geforderten Art die Combinationen $(k+1)$ter Classe zu bilden, setze man zu 1 die Combinationen $k$ter Classe aller Elemente; zu 2 die Combinationen $k$ter Classe der Elemente 2 bis n; zu 3 die Combinationen $k$ter Classe der Elemente 3 bis n; zu 4 die Combinationen $k$ter Classe der Elemente 4 bis n, u. s. w. Gesetzt, es gäbe $\binom{m+k-1}{k}$ Combinationen $k$ter Classe von m Elementen, folglich $\binom{n+k-2}{k}$ Combinationen der Elemente 2 bis n, $\binom{n+k-3}{k}$ Combinationen der Elemente 3 bis n, u. s. w., so gäbe es

$$\binom{n+k-1}{k}+\binom{n+k-2}{k}+\cdots+\binom{k}{k}=\binom{n+k}{k+1}$$

Combinationen $(k+1)$ter Classe aller Elemente (5). Nun giebt es $\binom{n}{1}$ Combinationen 1ter Classe aller Elemente, folglich giebt es

$$\binom{n+1}{2} \text{ Combinationen 2ter Classe,}$$

$$\binom{n+2}{3} \text{ Combinationen 3ter Classe, u. s. f.}$$

Anmerkung. Die Anfänge der Combinatorik finden sich im 16ten Jahrhundert bei Buckley, Cardano u. A. Die erste größere Abhandlung über Combinationen hat Pascal um 1650 verfaßt, in der er mit Fermat zusammentreffend den Zusammenhang der Combinationszahlen mit den figurirten Zahlen erläuterte (Oeuvres éd. Lahure II. p. 423 ff.) Leibniz's Abhandlung de arte combinatoria 1666 enthält nicht sowohl theoretisch Neues als vielmehr Anwendungen der Lehre von den Permutationen und Combinationen. Der heutige Bestand der Combinatorik findet sich vollständig in Jacob Bernoulli's ars conjectandi (op. posth. 1713). In diesem Buche kommt der Name Permutationen vor, wofür Leibniz Variationen, Wallis Alternationen gebraucht hatte. Der Name Complexionen bedeutet bei Leibniz Combinationen; der Name Variationen hat seine combinatorische Bedeutung gegen das Ende des 18ten Jahrhunderts erhalten.

§. 26. Determinante eines Systems von Zahlen.

1. Wenn n^2 Zahlen (Elemente) und zwar je n in n Reihen geordnet gegeben sind, die man am einfachsten durch doppelte Ordnungszahlen (Numern, Indices, Suffixe) bezeichnet, z. B.

$$\begin{matrix} a_{12} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{matrix}$$

so versteht man unter der Determinante*) dieses Systems das Aggregat der Producte von je n solchen Elementen, die sämmtlich verschiedenen Zeilen und Colonnen angehören. Das Anfangsglied $a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \,.\,.\, a_{nn}$ wird positiv, ein anderes Glied $a_{1p}\ a_{2q}\ a_{3r} \,.\,.\,.$ negativ oder positiv genommen, je nachdem die Complexion der Numern $p\ q\ r\ .\,.$ zu den ungeraden oder zu den geraden Permutationen von $1\ 2\ 3\ .\,.\ n$ (§. 24, 6) gehört.

Die Determinante des Systems von n^2 Elementen heißt $n$ten Grades, weil ihre Glieder Producte von n Factoren sind, und wird durch Einschluß des Systems zwischen Linien oder durch das mit dem Doppelzeichen $\pm$ unter ein Summirungszeichen gesetzte Anfangsglied bezeichnet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\ a_{22} \,.\,.\, a_{nn}.$$

2. Die Glieder der Determinante können aus dem Anfangsglied sowohl dadurch abgeleitet werden, daß man die ersten Numern unverändert läßt und die Permutationen der zweiten Numern bildet, als auch dadurch, daß man die zweiten Numern unverändert läßt und die Permutationen der ersten Numern bildet. Bei dem ersten Verfahren nimmt man aus jeder Zeile der Reihe nach Glieder, welche verschiedenen Colonnen angehören; beim zweiten Verfahren nimmt man aus jeder Colonne der Reihe nach Glieder, die verschiedenen Zeilen angehören. Irgend ein Glied $a_{1p}\ a_{2q}\ a_{3r} \,.\,.\,$, welches beim ersten Verfahren

---

*) Die Geschichte und die weitere Entwickelung dieser Formen findet man in der Schrift des Verf. über Determinanten.

durch Vertauschung von a_{11} mit a_{1p}, von a_{22} mit a_{2q}, von a_{33} mit a_{3r}, . . gebildet worden ist, ergiebt sich beim zweiten Verfahren durch Vertauschung von a_{pp} mit a_{1p}, von a_{qq} mit a_{2p}, von a_{rr} mit a_{3r}, . . . In beiden Fällen hat man gleichviel Numern mit andern zu vertauschen; also erhält in beiden Fällen das Glied $a_{1p}\, a_{2q}\, a_{3r} \ldots$ dasselbe Zeichen.

Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & & \cdot\cdot\cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot\cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{n2} \\ \cdot\cdot\cdot & & \cdot\cdot\cdot & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sind von einander nicht verschieden, weil sie dasselbe Anfangsglied haben, und weil jedes Glied der einen in der andern mit demselben Zeichen vorkommt. Die Zeilen des einen Systems stimmen mit den Colonnen des andern Systems überein.

Beispiele: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix} = a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2 - 2abfg - 2acfh - bcgh$$

3. Wenn im System der Elemente zwei parallele Reihen vertauscht werden, so wechselt die Determinante das Zeichen. Wenn im System der Elemente zwei parallele Reihen einander gleich sind, so hat die Determinante den Werth 0.

Beweis. Ist R die Determinante des gegebenen Systems, R' die Determinante des Systems, das aus dem gegebenen System durch Vertauschung von zwei parallelen Reihen abgeleitet worden, so kommt das Anfangsglied von R' in R negativ vor, weil es aus dem Anfangsgliede von R durch Vertauschung von zwei ersten oder von zwei zweiten Nu=

mern gebildet ist. Alle andern Glieder von R' kommen in R ebenfalls mit den entgegengesetzten Zeichen vor, weil sie aus dem Anfangsglied von R durch eine gerade oder ungerade Anzahl Vertauschungen von Numern sich bilden lassen, wenn sie aus dem Anfangsgliede von R' durch eine ungerade oder gerade Anzahl Vertauschungen gebildet waren. Daher ist $R' = -R$.

Sind die vertauschten Reihen einander gleich, so ist $R = -R = 0$ bei beliebigen Werthen der Elemente. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a & a_2 \\ b & b_1 & b & b_2 \\ c & c_1 & c & c_2 \\ d & d_1 & d & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

4. Wenn i und k beliebige Numern der Reihe 1, 2, . . , n bedeuten, und a_{ik} ein beliebiges Element des Systems ist, dessen Determinante den Werth R hat; wenn α_{ik} den Coefficienten von a_{ik} in der Determinante, d. h. $a_{ik}\alpha_{ik}$ das Aggregat der Glieder der Determinante bedeutet, welche das Element a_{ik} enthalten, so hat jede der Summen

$$a_{i1}\,\alpha_{k1} + a_{i2}\,\alpha_{k2} + \cdot\cdot + a_{in}\,\alpha_{kn}$$
$$a_{1i}\,\alpha_{1k} + a_{2i}\,\alpha_{2k} + \cdot\cdot + a_{ni}\,\alpha_{nk}$$

den Werth R oder 0, je nachdem i und k gleich sind oder ungleich.

Beweis. In jedem Glied der Determinante kommt ein Element der $k$ten Zeile des Systems vor, a_{k1} oder a_{k2} oder a_{k3}, . . . Nach Voraussetzung ist aber $a_{k1}\,\alpha_{k1}$ das Aggregat der Glieder der Determinante, welche das Element a_{k1} enthalten, u. s. w. Daher umfaßt die Summe

$$a_{k1}\,\alpha_{k1} + a_{k2}\,\alpha_{k2} + \cdot\cdot + a_{kn}\,\alpha_{kn}$$

alle Glieder der Determinante und hat den Werth R. Ebenso findet man

$$R = a_{1k}\,\alpha_{1k} + a_{2k}\,\alpha_{2k} + \cdot\cdot + a_{nk}\,\alpha_{nk}.$$

Setzt man in diesen Summen die Elemente der $k$ten Zeile oder Colonne den Elementen der $i$ten Zeile oder Colonne der Reihe nach gleich, so bleiben die Coefficienten α_{k1}, α_{k2}, . . oder die Coefficienten α_{1k}, α_{2k}, . . unverändert, und man erhält die Determinanten von Systemen, worin zwei parallele Reihen einander gleich sind, und welche den Werth 0 haben (3).

5. Um eine Determinante mit einer Zahl zu multipliciren oder zu dividiren, kann man alle Elemente einer Reihe des Systems mit der Zahl multipliciren oder dividiren, weil (4)

$$pR = pa_{1k}\,\alpha_{1k} + pa_{2k}\,\alpha_{2k} + \cdot\cdot + pa_{nk}\,\alpha_{nk}$$
$$= pa_{k1}\,\alpha_{k1} + pa_{k2}\,\alpha_{k2} + \cdot\cdot + pa_{kn}\,\alpha_{kn}.$$

Z. B.

$$p\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \\ pa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & pb_1 & pc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & b_1 \\ -a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & c_1 \\ a & b_2 & c_2 \\ a & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c_1 \\ a & b & c_2 \\ a & b & c_3 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & c_2 \\ 1 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Wenn die Elemente einer Reihe polynomisch sind, so läßt sich die Determinante in ein Aggregat von Determinanten desselben Grades zerlegen. Es sei für die Werthe 1, 2, . ., n von i

$$a_{ik} = p_i + q_i + r_i + \cdot\cdot,$$

so ist

$$\begin{aligned} R = \;& p_1\alpha_{1k} + p_2\alpha_{2k} + \cdot\cdot + p_n\alpha_{nk} \\ &+ q_1\alpha_{1k} + q_2\alpha_{2k} + \cdot\cdot + q_n\alpha_{nk} \\ &+ r_1\alpha_{1k} + r_2\alpha_{2k} + \cdot\cdot + r_n\alpha_{nk} \\ &+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{aligned}$$

Die einzelnen Summen entspringen aus $\Sigma \pm a_{11}\,a_{22} \cdot\cdot a_{nn}$, indem man an die Stelle von $a_{1k}, a_{2k}, \cdot\cdot$ zuerst die Reihe $p_1, p_2, \cdot\cdot$, dann $q_1, q_2, \cdot\cdot$, u. s. w. setzt. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+d \\ a_2 & b_2 & c_2+e \\ a_3 & b_3 & c_3+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d \\ a_2 & b_2 & e \\ a_3 & b_3 & f \end{vmatrix}$$

7. Der Werth einer Determinante bleibt unverändert, wenn man die Elemente einer Reihe mit derselben Zahl multiplicirt und die Producte der Reihe nach zu den Elementen einer parallelen Reihe addirt.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+pa_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+pa_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+pa_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

weil (6)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+pa_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+pa_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+pa_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & pa_1 & c_1 \\ a_2 & pa_2 & c_2 \\ a_3 & pa_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

und die zweite Determinante verschwindet (5). Daher ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \\ 1 & x_3-a & y_3-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

§. 27. Producte und Potenzen von Polynomien.

(Heis §. 92).

1. Das Product $(a_1+x)(a_2+x)\,..\,(a_n+x)$ giebt entwickelt eine Summe von 2^n Gliedern. Das Anfangsglied ist das Product aller ersten Glieder der Binomien $a_1a_2\,..\,a_n$; das Schlußglied ist das Product aller zweiten Glieder x^n. Die Glieder des Products, welche den Factor x^k gemein haben, entstehen durch Multiplication von je $n-k$ ersten Gliedern der Binomien und den zweiten Gliedern der übrigen Binomien. Der Coefficient von x^k ist demnach die Summe der Producte von je $n-k$ verschiedenen Größen aus der Reihe $a_1, a_2, .., a_n$. Um diesen Coefficienten zu berechnen, bildet man die Combinationen $(n-k)$ter Classe der Elemente $a_1, a_2, .., a_n$. Z. B.

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x) = abcd+(abc+abd+acd+bcd)x$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(a+b+c+d)x^3+x^4.$$

Wenn insbesondere alle Glieder $a_1, a_2, .., a_n$ einander gleich sind und den Werth a haben, so ist der Coefficient von x^k die Summe von $\binom{n}{n-k}$ Gliedern, deren jedes den Werth a^{n-k} hat. Da aber $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ ist, so erhält man

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + ..$$

wie §. 23 aus andern Gründen entwickelt worden ist.

2. Die Potenz $(a+b+c+\,.\,.)^n$ giebt entwickelt eine Summe von Gliedern, die je n Factoren aus der Reihe $a, b, c, ..$ enthalten und aus der allgemeinen Formel

$$\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2..\gamma\ldots}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma\,..$$

dadurch hervorgehen, daß α, β, γ, . . . auf alle mögliche Arten gleiche oder ungleiche Werthe von 0 bis n erhalten, deren Summe jedesmal n beträgt*).

Beweis. Aus der Reihe der n Polynomien $a + b + c + ..$ wähle man α, um aus ihren ersten Gliedern a^α zu bilden. Aus den übrigen $n - \alpha$ Polynomien wähle man β, um aus ihren zweiten Gliedern b^β zu bilden. Aus den übrigen $n - \alpha - \beta$ Polynomien wähle man γ, um aus ihren dritten Gliedern c^γ zu bilden, u. s. f. Wenn man das Product $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ . . auf alle mögliche Arten gebildet hat, so hat man alle Glieder der gesuchten Potenz.

Man kann aber a^α auf $\binom{n}{\alpha}$ verschiedene Arten bilden, weil es soviel Combinationen αter Classe der n Polynomien giebt. Man kann dann ebenso b^β auf $\binom{n-\alpha}{\beta}$ verschiedene Arten, dann c^γ auf $\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ verschiedene Arten, u. s. w. bilden. Man kann folglich $a^\alpha\, b^\beta$ auf $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\beta}{\beta}$ verschiedene Arten, $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ auf $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ verschiedene Arten, u. s. w. bilden. Daher erhält das Glied $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ . . den Coefficienten

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma\ldots}$$

d. i. die Anzahl der Permutationen von n Elementen, deren α den Werth a, β den Werth b, γ den Werth c, . . haben (§. 25, 4).

Beispiel. Wenn $n = 4$, so sind folgende Combinationen der Exponenten möglich:

4   3 1   2 1 1   1 1 1 1
2 2

Man bilde nun die Combinationen 1ter bis 4ter Classe der Elemente a, b, c, . . und nehme die Elemente
in jeder Combination 1ter Classe mit dem Exponenten 4,
in jeder Combination 2ter Classe der Reihe nach mit den Exponenten
3, 1   1, 3   2, 2

*) Leibniz an Joh. Bernoulli 1695 Mai $\frac{6}{16}$. Vergl. Klügel math. W. 3 p. 832.

in jeder Combination 3ter Classe mit den Exponenten

2, 1, 1   1, 2, 1   1, 1, 2

in jeder Combination 4ter Classe mit dem Exponenten 1.

Die Glieder a^4, . . erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} = 1$.

Die Glieder a^3b, ab^3, . . erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$.

Die Glieder a^2b^2, . . erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$.

Die Glieder a^2bc, ab^2c, . . erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$.

Die Glieder $abcd$, . . erhalten den Coefficienten $1.2.3.4 = 24$.

Werden die Summen dieser Glieder der Reihe nach durch

$$\Sigma a^4, \ \Sigma a^3b, \ \Sigma a^2b^2, \ \Sigma a^2bc, \ \Sigma abcd$$

und das Polynomium $a + b + c + ..$ durch P bezeichnet, so ist

$$P^4 = \Sigma a^4 + 4\Sigma a^3b + 6\Sigma a^2b^2 + 12\Sigma a^2bc + 24\Sigma abcd.$$

Analog hat man

$$P^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab,$$

$$P^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2b + 6\Sigma abc, \text{ u. s. w.}$$

Um bei der Potenzirung mit 6 z. B. Σa^3b^2c darzustellen, bildet man die Combinationen 3ter Classe der Elemente a, b, c, . . und giebt den Elementen der einzelnen Complexionen der Reihe nach die Exponenten

3, 2, 1   3, 1, 2   2, 3, 1   u. s. f.

3. Um die Potenz $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ..)^n$ in eine Summe von Gliedern nach der Reihe der darin vorkommenden Potenzen von x geordnet zu entwickeln, bildet man die Combinationen $n$ter Classe der Elemente a_0, a_1, a_2, . . , deren jedes $n$mal gesetzt werden kann, so daß die Summen der Indices in den einzelnen Combinationen der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, . . haben. Wenn eine Combination aus α Elementen a_0, β Elementen a_1, γ Elementen a_2, . . besteht und die Summe der n Indices $\alpha.0 + \beta.1 + \gamma.2 + .. = k$, so ist (2)

$$\frac{1.2...n}{1.2...\alpha.1.2...\beta.1.2...\gamma...} a_0^\alpha (a_1x)^\beta (a_2x^2)^\gamma \, ..$$

ein Glied der gesuchten Reihe, welches x^k enthält, weil

$$a_0^\alpha (a_1x)^\beta (a_2x^2)^\gamma \, .. = a_0^\alpha a_1^\beta a_2^\gamma \, .. \, x^{\beta+2\gamma+..}$$

Man findet alle Glieder, in denen x^k vorkommt, wenn man die Zahl k aus n ungleichen oder gleichen Indices der Glieder des Polynomium

0, 1, 2, . . auf alle verschiedenen Arten zusammensetzt*). Z. B. für $n=5$ kann man die Exponenten von x auf folgende Arten zusammensetzen:

0 aus	0 0 0 0 0	6 aus	0 0 0 0 6
1 aus	0 0 0 0 1		0 0 0 1 5
2 aus	0 0 0 0 2		0 0 0 2 4
	0 0 0 1 1		0 0 0 3 3
3 aus	0 0 0 0 3		0 0 1 1 4
	0 0 0 1 2		0 0 1 2 3
	0 0 1 1 1		0 0 2 2 2
4 aus	0 0 0 0 4		0 1 1 1 3
	0 0 0 1 3		0 1 1 2 2
	0 0 0 2 2		1 1 1 1 2
	0 0 1 1 2	7 aus	0 0 0 0 7
	0 1 1 1 1		u. s. w.
5 aus	0 0 0 0 5		
	0 0 0 1 4		
	0 0 0 2 3		
	0 0 1 1 3		
	0 0 1 2 2		
	0 1 1 1 2		
	1 1 1 1 1		

Ist r, s, t, u, v eine dieser Complexionen, so hat das Glied

$$a_r\, a_s\, a_t\, a_u\, a_v\, x^{r+s+t+u+v}$$

den Coefficienten 1, wenn 5 gleiche Indices vorhanden sind,
„ 5, „ 4 „ „ „
„ 20, „ 3 „ „ „
„ 60, „ 2 „ „ „
„ 30, „ 2 u. 2 „ „ „
„ 10, „ 2 u. 3 „ „ „
„ 120, wenn alle Indices verschieden sind.

Die gesuchte Potenz ist demnach:

$$a_0^5 + 5a_0^4a_1x + \left.\begin{matrix}5a_0^4a_2\\10a_0^3a_1^2\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}5a_0^4a_3\\20a_0^3a_1a_2\\10a_0^2a_1^3\end{matrix}\right| x^3$$

---

*) Moivre Philos. Trans. 1697 p. 619. Eine recurrente Entwickelung findet man bei Euler Introd. I. §. 76. Ueber die Anzahlen der möglichen Gliederungen einer gegebenen Zahl aus kleinern Zahlen hat Euler Introd. I. c. 16 weitere Untersuchungen angestellt.

$$
+\left.\begin{array}{r} 5a_0{}^4a_4 \\ 20a_0{}^3a_1a_3 \\ 10a_0{}^3a_2{}^2 \\ 30a_0{}^2a_1{}^2a_2 \\ 5a_0a_1{}^4 \end{array}\right| x^4
+\left.\begin{array}{r} 5a_0{}^4a_5 \\ 20a_0{}^3a_1a_4 \\ 20a_0{}^3a_2a_3 \\ 30a_0{}^2a_1{}^2a_3 \\ 30a_0{}^2a_1a_2{}^2 \\ 20a_0a_1{}^3a_2 \\ a_1{}^5 \end{array}\right| x^5
+\left.\begin{array}{r} 5a_0{}^4a_6 \\ 20a_0{}^3a_1a_5 \\ 20a_0{}^3a_2a_4 \\ 10a_0{}^3a_3{}^2 \\ 30a_0{}^2a_1{}^2a_4 \\ 60a_0{}^2a_1a_2a_3 \\ 10a_0{}^2a_2{}^3 \\ 20a_0a_1{}^3a_3 \\ 30a_0a_1{}^2a_2{}^2 \\ 5a_1{}^4a_2 \end{array}\right| x^6 + \ldots
$$

4. Wenn man in der Reihe der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jede Größe von allen folgenden subtrahirt, so erhält man $\binom{n}{2}$ Differenzen, deren Product sich auf eine Determinante reducirt, nämlich*)

$$
\begin{array}{r} (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1) \\ (a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2) \\ \ldots\ldots\ldots \\ (a_n-a_{n-1}) \end{array}
=
\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1{}^2 & \ldots & a_1{}^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2{}^2 & \ldots & a_2{}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n{}^2 & \ldots & a_n{}^{n-1} \end{vmatrix}
$$

Beweis. Sind i, k beliebige Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$, und zwar $i < k$; ist P das gesuchte Product, Q das Product der Differenzen, welche die Größen a_i und a_k nicht enthalten, R das Product der Differenzen, welche die Größe a_i, aber nicht a_k enthalten, S das Product der Differenzen, welche die Größe a_k, aber nicht a_i enthalten, so ist $P = QRS(a_k - a_i)$. Wenn nun a_i mit a_k vertauscht wird, so bleibt Q unverändert; RS bleibt unverändert, weil das Product jedes Paares wie $(a_h - a_i)(a_h - a_k)$ oder $(a_i - a_h)(a_h - a_k)$ oder $(a_i - a_h)(a_k - a_h)$ unverändert bleibt; $a_k - a_i$ aber erhält den entgegengesetzten Werth; demnach erhält P den entgegengesetzten Werth.

In P kommt zunächst als Product aller Minuenden das Glied $a_1{}^0a_2{}^1a_3{}^2 \ \ldots \ a_n{}^{n-1}$ vor. Ferner kommt jedes Glied, welches aus $a_1{}^0a_2{}^1a_3{}^2 \ \ldots \ a_n{}^{n-1}$ durch Vertauschung der Indices sich bilden läßt, als Product aller Minuenden in einem Product vor, das den Werth P oder $-P$ hat, je nachdem die Permutation der Indices zu den geraden oder ungeraden Permutationen gehört. Daher umfaßt P alle Glieder, welche aus $a_1{}^0a_2{}^1a_3{}^2 \ldots a_n{}^{n-1}$ durch Vertauschung der Indices abgeleitet werden können, und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Permutationen der Indices gerade oder ungerade sind; mithin enthält P alle Glieder der obigen Determinante (§. 26, 1).

---

*) Cauchy's Lehrsatz. Vergl. des Verf. Determ. §. 10.

Kein Glied von P enthält eine der Größen $a_1, a_2, \ldots$ in höherer als $(n-1)$ter Potenz, weil jede der Größen in $n-1$ Differenzen vorkommt. Die Glieder von P, worin irgend zwei der Größen gleiche Exponenten haben, sind paarweise entgegengesetzt gleich. Wenn z. B. $a_h^\alpha\, a_i^\beta\, a_k^\gamma \ldots$ ein Glied von P bedeutet, so ist $a_i^\alpha\, a_h^\beta\, a_k^\gamma \ldots$ ein Glied von $-P$, und $-a_i^\alpha\, a_h^\beta\, a_k^\gamma \ldots$ ein Glied von P. Die Glieder $a_h^\alpha\, a_i^\beta\, a_k^\gamma \ldots$ und $-a_i^\alpha\, a_h^\beta\, a_k^\gamma \ldots$ sind entgegengesetzt gleich, wenn $\alpha = \beta$. Daher bleiben in P nur die Glieder der obigen Determinante übrig.

Von allen $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ Gliedern des Products bleiben demnach nur die $1.2\ldots n$ Glieder der Determinante übrig, also $1.2.3$ statt 2^3, $1.2.3.4$ statt 2^6, $1.2.3.4.5$ statt 2^{10}, u. s. f.

In dem einfachsten Falle ist

$$(b-a)(c-a)(c-b) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$
$$= ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a$$

folglich auch

$$1 = \frac{ab}{(c-a)(c-b)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-a)(b-c)}.$$

§. 28. Figurirte Zahlen und arithmetische Progressionen.

(Heis §. 93. 81. 82).

1. Die Formel $\binom{m+n-1}{m}$, welche als Binomialcoefficient, so wie als Anzahl von Combinationen oder Permutationen in Betracht gezogen worden ist (§. 23 und 25), heißt auch die $n$te figurirte Zahl $m$ter Ordnung*). Die Reihe der figurirten Zahlen $m$ter Ordnung ist demnach

---

*) Die Bildung der figurirten Zahlen (Polygonalzahlen u. s. w.) durch fortschreitende Summirung wird der Pythagoreischen Schule zugeschrieben. Die ältesten Abhandlungen über dieselben sind von Nicomachus Arithm. II und Diophantus verfaßt, über welche Nesselmann Gesch. d. Algebra p. 201 und 462 Bericht erstattet. Mit Aufsuchung allgemeiner Formeln der figurirten Zahlen haben im 16ten und 17ten Jahrh. sich beschäftigt Maurolycus Arithm. I (1575), Benz Manuductio ad numerum geometricum Ulm 1621, Faulhaber u. A. Vergl. Kästner Gesch. d. Math. 3 p. 120. Die Darstellung einer figurirten Zahl durch die Quotienten von Producten folgender Zahlen ist von Fermat (Brief an Roberval 1636 Nov. 4) entdeckt worden, bald darauf auch von Pascal Traité des ordres numériques. Oeuvres éd. Lahure II p. 440.

$$\binom{m}{m},\ \binom{m+1}{m},\ \binom{m+2}{m},\ \ldots,\ \binom{m+n-1}{m},\ \ldots\ .$$

Die erste figurirte Zahl jeder Ordnung ist 1. Die figurirten Zahlen erster Ordnung sind die natürlichen Zahlen. Die $n$te figurirte Zahl $m$ter Ordnung erscheint als Summe der $(n-1)$ten figurirten Zahl der $m$ten Ordnung und der $n$ten figurirten Zahl der $(m-1)$ten Ordnung, oder als Summe der ersten n figurirten Zahlen $(m-1)$ter Ordnung, weil (§. 25, 5)

$$\binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-2}{m-1}$$
$$= \binom{m-1}{m-1} + \binom{m}{m-1} + \binom{m+1}{m-1} + \ldots + \binom{m+n-2}{m-1}$$

Die Summen der ersten 1, 2, 3, . . natürlichen Zahlen sind die figurirten Zahlen zweiter Ordnung; die Summen der ersten 1, 2, 3, . . figurirten Zahlen zweiter Ordnung sind die figurirten Zahlen dritter Ordnung, u. s. w., weil

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$$
$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$
$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$$

u. s. w. Demnach sind die figurirten Zahlen der ersten Ordnungen folgende:

1	2	3	4	5	6	7	. .
1	3	6	10	15	21	28	. .
1	4	10	20	35	56	84	. .
1	5	15	35	70	126	210	. .

Anmerkung. Die figurirten Zahlen zweiter Ordnung werden Trigonalzahlen, die figurirten Zahlen dritter Ordnung Tetraedralzahlen (dreiseitige Pyramidalzahlen) genannt, so daß die $n$te figurirte Zahl zweiter Ordnung das Dreieck der Zahl n, die $n$te figurirte Zahl dritter Ordnung das Tetraeder der Zahl n heißt. Die Einheiten der $n$ten Trigonalzahl können nämlich in parallele Zeilen zu einem Dreieck zusammengestellt werden, dessen Seiten je n Einheiten enthalten. Die Einheiten der $n$ten Tetraedralzahl können in parallele ähnliche Dreiecke zu einem Tetraeder zusammengestellt werden, dessen Kanten je n Einheiten enthalten. Die figurirten Zahlen höherer Ordnungen sind auf solche Weise nicht construirbar.

2. Wenn man die figurirten Zahlen $m$ter Ordnung der Reihe nach

mit den Gliedern der geometrischen Progression 1, v, v^2, v^3, . . multiplicirt, so erhält man eine Reihe von Gliedern, deren Summe s_m sich durch die aus figurirten Zahlen $(m-1)$ter Ordnung auf dieselbe Art gebildete Summe s_{m-1} ausdrücken läßt. Aus den Reihen

$$s_m = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} v + \ldots + \binom{m+n-1}{m} v^{n-1}$$

$$v s_m = \binom{m}{m} v + \ldots + \binom{m+n-2}{m} v^{n-1} + \binom{m+n-1}{m} v^n$$

ergiebt sich, weil $\binom{k+1}{m} - \binom{k}{m} = \binom{k}{m-1}$ ist (1),

$$(1-v)s_m = s_{m-1} - \binom{m+n-1}{m} v^n$$

indem man die Summe s_{m-1} aus s_m durch Erniedrigung von m um 1 bildet. Vergl. §. 22, 2. Setzt man demnach

$$s_0 = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$
$$s_1 = 1 + 2v + 3v^2 + \ldots + nv^{n-1}$$
$$s_2 = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} v + \binom{4}{2} v^2 + \ldots + \binom{n+1}{2} v^{n-1}$$

so findet man

$$(1-v)s_0 = 1 - v^n$$
$$(1-v)s_1 = s_0 - nv^n$$
$$(1-v)s_2 = s_1 - \binom{n+1}{2} v^n.$$

3. Wenn man die figurirten Zahlen

$$\binom{m+k-1}{m}, \binom{m+k-1}{m+1}, \binom{m+k-1}{m+2}, \ldots$$

der Reihe nach mit den gegebenen Zahlen a, b, c, . . multiplicirt und die Producte addirt, so erhält man eine figurirte Zahl im weitern Sinne

$$f_k = a \binom{m+k-1}{m} + b \binom{m+k-1}{m+1} + c \binom{m+k-1}{m+2} + \ldots$$

Die Summe von n solchen figurirten Zahlen ist wiederum eine figurirte Zahl, deren Formel aus f_k durch Erhöhung von m um 1 entsteht.

Denn man hat, weil $\binom{m}{m+1} = 0$,

$$f_1 = a\binom{m}{m}$$

$$f_2 = a\binom{m+1}{m} \quad + b\binom{m+1}{m+1}$$

$$f_3 = a\binom{m+2}{m} \quad + b\binom{m+2}{m+1} \quad + c\binom{m+2}{m+2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_n = a\binom{m+n-1}{m} + b\binom{m+n-1}{m+1} + c\binom{m+n-1}{m+2} + \cdot\cdot$$

und findet durch Addition der Colonnen (1) die Summe

$$f_1 + f_2 + \cdot\cdot + f_n$$

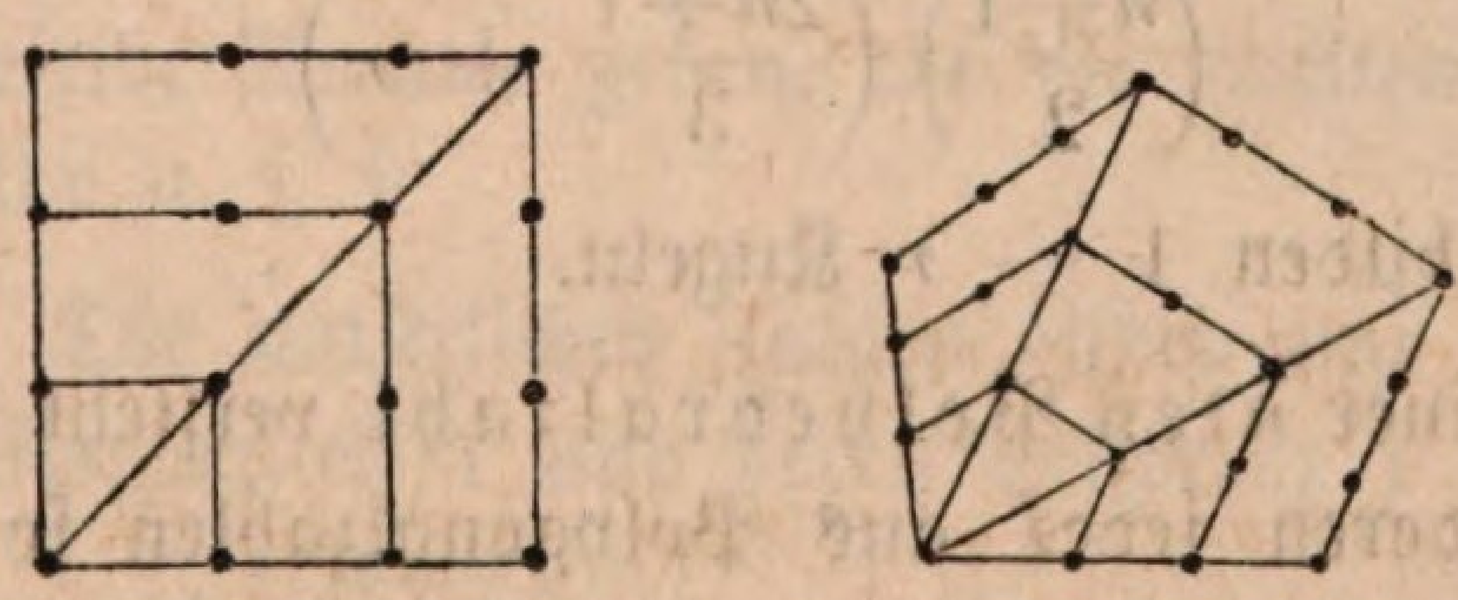
$$= a\binom{m+n}{m+1} + b\binom{m+n}{m+2} + c\binom{m+n}{m+3} + \ldots$$

4. Zu den figurirten Zahlen im weitern Sinne gehören die sogenannten **Polygonalzahlen**, **Pyramidalzahlen**, **Polyedralzahlen**.

I. Unter dem pEck **der Zahl** n (der $n$ten $p$eckigen Zahl) versteht man die Summe von n Gliedern der Reihe

$$1, \quad 1 + p - 2, \quad 1 + 2(p - 2), \quad 1 + 3(p - 2), \quad \ldots$$

deren Einheiten zu ähnlichen pEcken mit einem gemeinschaftlichen Scheitel zusammengestellt werden können, wie folgt:



Diese Summe besteht aus n Einheiten und aus $p - 2$ Dreiecken von $n-1$ (1), also ist

$$p\text{Eck von } n = n + (p - 2)\binom{n}{2}.$$

Die Dreiecke der Zahlen sind von den figurirten Zahlen der 2ten Ordnung nicht verschieden, die Vierecke der Zahlen stimmen mit den Quadratzahlen überein, weil

$$n + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}, \quad n + 2\binom{n}{2} = n^2.$$

Die Fünfecke, Sechsecke der Zahlen 1, 2, . . , n sind

$$1,\quad 5,\quad 12,\quad 22,\quad 35, \ldots, \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$1,\quad 6,\quad 15,\quad 28,\quad 45, \ldots, n(2n-1).$$

II. Unter der $p$seitigen **Pyramide** der **Zahl** n versteht man die Summe der pEcke von den Zahlen 1 bis n, deren Einheiten zu ähnlichen $p$seitigen Pyramiden mit gemeinschaftlicher Spitze zusammengestellt werden können. Nach (3) ist

$$p\text{seitige Pyramide von } n = \binom{n+1}{2} + (p-2)\binom{n+1}{3}.$$

Die 3seitigen Pyramiden der natürlichen Zahlen sind von den figurirten Zahlen der 3ten Ordnung nicht verschieden. Die 4seitigen, 5seitigen, 6seitigen Pyramiden der natürlichen Zahlen sind

$$1,\quad 5,\quad 14,\quad 30,\quad 55, \ldots, \binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}$$

$$1,\quad 6,\quad 18,\quad 40,\quad 75, \ldots, \binom{n+1}{2} n$$

$$1,\quad 7,\quad 22,\quad 50,\quad 95, \ldots, \binom{n+1}{2}\frac{4n-1}{3}.$$

Ein Kugelhaufen aus rectangulären Schichten, der oben in eine Reihe Kugeln endet, auf dessen Basis in der Breite n, in der Länge $n + r$ Kugeln liegen, enthält eine Anzahl Kugeln, die aus der 4seitigen Pyramide von n und aus r Dreiecken von n besteht, also

$$\binom{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} + r\right)$$

ist. Den Rücken bilden $1 + r$ Kugeln.

III. Unter einer $n$ten **Polyedralzahl** versteht man die Summe von n Gliedern, deren jedes aus Polygonalzahlen so besteht, daß die Einheiten der Polyedralzahlen zu ähnlichen Polyedern mit einer gemeinschaftlichen Ecke zusammengestellt werden können. Wenn das Polyeder e Ecken, f Flächen, k Kanten hat und die gemeinschaftliche Ecke der ähnlichen Polyeder $g$seitig ist, so umfaßt die Differenz der Polyeder von n und $n-1$ zunächst $e-1$ Einheiten an den nicht gemeinschaftlichen Ecken, dann $(k-g)(n-2)$ Einheiten auf den nicht gemeinschaftlichen Kanten, endlich $f-g$ Polygone der Zahl $n-2$ auf den nicht gemeinschaftlichen Flächen. Z. B. das Hexaeder der Zahl n ist die Summe von n Gliedern der Reihe

$$1,\quad 7,\quad 7+9+3,\quad 7+9.2+3.\text{Viereck } 2,$$
$$7+9.3+3.\text{Viereck } 3,\quad 7+9.4+3.\text{Viereck } 4, \ldots$$

und besteht demnach aus 1, aus $7(n-1)$, aus der 9fachen Summe der Zahlen von 1 bis $n-2$, aus der 3fachen Summe der Vierecke von 1 bis $n-2$. Daher findet man

$$\text{Hexaeder von } n = 1 + 7(n-1) + 12\binom{n-1}{2} + 6\binom{n-1}{3}$$

$$= n + 6\binom{n+1}{3} = n^3,$$

und die Summe der Hexaeder von $1, 2, \ldots, n$

$$\binom{n+1}{2} + 6\binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{2}^2.$$

5. Von einer Reihe von Größen sagt man, daß sie eine arithmetische Progression bilden, wenn die Differenzen der auf einander folgenden Größen einander gleich sind. Eine arithmetische Progression ist durch 2 Elemente bestimmt; ist z. B. a das Anfangsglied, d die Differenz der folgenden Glieder, so ist die arithmetische Progression bis zum $n$ten Gliede folgende:

$$a,\quad a + d,\quad a + 2d, \ldots, a + (n-1)d.$$

Die Summe der n ersten Glieder ist (3)

$$na + \binom{n}{2} d = \frac{a + [a + (n-1)d]}{2}\, n,$$

d. h. die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes (das arithmetische Mittel derselben) multiplicirt mit der Gliederzahl. Man findet diese Summe auch durch die Bemerkung, daß die ersten Glieder vom Anfang und vom Ende dieselbe Summe geben, als die zweiten Glieder vom Anfang und vom Ende u. s. f.

Beispiele. Die natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz 1 ist. Die Summe der n ersten Zahlen ist $\binom{n+1}{2}$.

Die ungeraden Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz 2 ist. Die Summe der n ersten ungeraden Zahlen ist n^2.

Auch die ungeraden Potenzen können durch Summirung bestimmter Mengen von folgenden ungeraden Zahlen gefunden werden. Denn die n^a folgenden ungeraden Zahlen

$$(n-1)n^a + 1,\quad (n-1)n^a + 3, \ldots, (n-1)n^a + 1 + 2(n^a - 1)$$

geben die Summe

$$[(n-1)n^a + 1 + n^a - 1]n^a = n^{2a+1}.$$

Insbesondere ist $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, u. s. w. Also ist die Summe der Cuben*)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

gleich der Summe der $\binom{n+1}{2}$ ersten ungeraden Zahlen. Die letzte dieser Zahlen ist $2\binom{n+1}{2} - 1$, folglich die Summe $\binom{n+1}{2}^2$, wie oben (4).

6. Von einer Reihe von Größen sagt man, daß sie eine arithmetische Progression 2ter, 3ter, .. Ordnung bilden, wenn die Differenzen der auf einander folgenden Größen eine arithmetische Progression 1ter, 2ter, .. Ordnung bilden. Sind t_1, t_2, t_3, .. die gegebenen Größen, so bilde man die Reihe der ersten Differenzen

$$t_2 - t_1 = t_{1,1}, \quad t_3 - t_2 = t_{2,1}, \quad t_4 - t_3 = t_{3,1}, \ldots$$

die Reihe der zweiten Differenzen d. i. die Differenzen der auf einander folgenden ersten Differenzen

$$t_{2,1} - t_{1,1} = t_{1,2}, \; t_{3,1} - t_{2,1} = t_{2,2}, \; t_{4,1} - t_{3,1} = t_{3,2}, \ldots$$

die Reihe der dritten Differenzen

$$t_{2,2} - t_{1,2} = t_{1,3}, \; t_{3,2} - t_{2,2} = t_{2,3}, \; t_{4,2} - t_{3,2} = t_{3,3}, \ldots$$

u. s. w. Wenn die Reihe der $m$ten Differenzen aus gleichen Gliedern besteht, so ist die Reihe der gegebenen Größen eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung**). Z. B.

Gegebene Größen:	1	8	27	64	125	216
Erste Differenzen:		7	19	37	61	91
Zweite Differenzen:			12	18	24	30
Dritte Differenzen:				6	6	6

Die Zahlen 1, 8, 27, . ., bilden eine arithmetische Progression 3ter Ordnung, weil ihre 3ten Differenzen einander gleich sind.

Die figurirten Zahlen $m$ter Ordnung bilden eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, weil ihre ersten Differenzen figurirte Zahlen $(m-1)$ter Ordnung (1), folglich ihre $(m-1)$ten Differenzen die natürlichen Zahlen sind, welche eine arithmetische Progression erster Ordnung bilden.

---

*) Diese Bemerkung ist im Alterthum gemacht worden. Nicomachus Arithm. II, 20.

**) Die Reihen der Differenzen, welche zu einer gegebenen Reihe von Größen gehören, sind bei den Untersuchungen über die figurirten Zahlen gebildet (vergl. 1 und 10), und besonders bei der Erfindung der Differentialrechnung in Betracht gezogen worden. Der Name „arithmetische Progressionen höherer Ordnungen" kommt erst im Anfang des 18ten Jahrhunderts vor bei Lagny (Mém. de Paris 1722 p. 264).

7. Aus dem Anfangsgliede und den Anfangsdifferenzen d. h. aus den Anfangsgliedern der Reihen der 1ten, 2ten, 3ten, .. Differenzen lassen sich die Glieder einer arithmetischen Progression höherer Ordnung und die Summe der ersten n Glieder derselben berechnen. Wenn a_0 das Anfangsglied der gesuchten Progression ist, a_1 die erste ihrer 1ten Differenzen, a_2 die erste ihrer 2ten Differenzen, .., a_m der gemeinschaftliche Werth ihrer $m$ten (letzten) Differenzen, so ist das $n$te Glied der gesuchten Progression*)

$$a_0 + (n-1)\,a_1 + \binom{n-1}{2} a_2 + \ldots + \binom{n-1}{m} a_m$$

und die Summe ihrer n ersten Glieder

$$na_0 + \binom{n}{2} a_1 + \binom{n}{3} a_2 + \ldots + \binom{n}{m+1} a_m.$$

Beweis. Die Reihe der $(r-1)$ten Differenzen wird gebildet, indem man zu dem bekannten Anfangsgliede derselben die ersten 1, 2, 3, .. Glieder aus der Reihe der $r$ten Differenzen addirt (6)

$$t_{2,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r}$$
$$t_{3,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r} + t_{2,r}$$
$$t_{4,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r} + t_{2,r} + t_{3,r}$$

u. s. w. Daher ist $t_{n,m-1} = a_{m-1} + (n-1)a_m$.

Indem man die Summe $t_{1,m-1} + \ldots + t_{n-1,m-1}$ bildet (3) und zu a_{m-2} addirt, findet man weiter

$$t_{n,m-2} = a_{m-2} + (n-1)\,a_{m-1} + \binom{n-1}{2} a_m.$$

Unter der Annahme

$$t_{n,m-k} = a_{m-k} + (n-1)\,a_{m-k+1} + \binom{n-1}{2} a_{m-k+2} + \ldots + \binom{n-1}{k} a_m$$

findet man auf gleiche Weise

$$t_{n,m-k-1} = a_{m-k-1} + (n-1)\,a_{m-k} + \binom{n-1}{2} a_{m-k-1} + \ldots + \binom{n-1}{k+1} a_m.$$

Die angenommene Formel $t_{n,m-k}$ ist richtig, wenn $k = 2$, also gilt sie auch für $k = 3, 4, \ldots, m$. Die Summe der n ersten Glieder der Progression $t_{1,0} + t_{2,0} + \ldots + t_{n,0}$ wird ebenfalls nach (3) berechnet.

8. Wenn $t_1, t_2, t_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz c bilden, und a eine gegebene Zahl ist,

---

*) Diese Formel ist ihrem Inhalte nach von Newton (principia III[b], lemma V.) erfunden, in ihrer heutigen Gestalt von Jac. Bernoulli (ars conj. p. 98) gegeben worden.

so bilden $at_1, at_2, at_3, ..$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz ac. Denn die Differenzen der abgeleiteten Progression entspringen aus den Differenzen der gegebenen Progression durch Multiplication mit a, weil $at_{k+1} - at_k = a(t_{k+1} - t_k)$ u. s. f.; wenn also die $m$ten Differenzen der Reihe $t_1, t_2, t_3, ..$ einander gleich sind, so sind auch die $m$ten Differenzen der Reihe $at_1, at_2, at_3, ..$ einander gleich und $a$mal so groß als jene.

Wenn $t_1, t_2, t_3, ..$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, $u_1, u_2, u_3, ..$ eine arithmetische Progression niederer als $m$ter Ordnung bilden, so bilden $t_1 + u_1, t_2 + u_2, t_3 + u_3, ..$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung. Denn die $n$te unter den $k$ten Differenzen der abgeleiteten Reihe ist die Summe der $n$ten unter den $k$ten Differenzen der gegebenen Reihen, weil

$$t_{k+1} + u_{k+1} - (t_k + u_k) = (t_{k+1} - t_k) + (u_{k+1} - u_k)$$

u. s. w. Nach der Voraussetzung verschwinden die $m$ten Differenzen der Reihe $u_1, u_2, u_3, ..$; also sind die $m$ten Differenzen der Reihe $t_1 + u_1, t_2 + u_2, t_3 + u_3, ..$ von den $m$ten Differenzen der Reihe $t_1, t_2, t_3, ..$ nicht verschieden.

9. Wenn $t_1, t_2, t_3, ..$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz c bilden, so bilden $t_1, 2t_2, 3t_3, ..$ eine arithmetische Progression $(m + 1)$ter Ordnung mit der letzten Differenz $(m + 1)c$.

Beweis. Für die abgeleitete Reihe ist die $n$te unter den 1ten Differenzen nach der angegebenen Bezeichnung (6)

$$(n + 1)t_{n+1} - nt_n = n(t_{n+1} - t_n) + t_{n+1} = nt_{n,1} + t_{n+1}$$

und daher die $n$te unter den 2ten Differenzen

$$(n + 1)t_{n+1,1} + t_{n+2} - nt_{n,1} - t_{n+1} = nt_{n,2} + 2t_{n+1,1}$$

Angenommen, die $n$te unter den $k$ten Differenzen sei

$$nt_{n,k} + kt_{n+1,k-1}$$

so findet man die $n$te unter den $(k + 1)$ten Differenzen

$$(n + 1)t_{n+1,k} + kt_{n+2,k-1} - nt_{n,k} - kt_{n+1,k-1}$$
$$= nt_{n,k+1} + (k + 1)t_{n+1,k}.$$

Nun war die $n$te unter den 2ten Differenzen $nt_{n,2} + 2t_{n+1,1}$, folglich ist die $n$te unter den 3ten, . . , $(m + 1)$ten Differenzen

$$nt_{n,3} + 3t_{n+1,2}$$

. . . .

$$nt_{n,m+1} + (m + 1)t_{n+1,m}$$

Nach der Voraussetzung ist $t_{n,m+1} = 0$, $t_{1,m} = t_{2,m} = .. = c$, also haben

die $(m+1)$ten Differenzen der abgeleiteten Reihe den gemeinschaftlichen Werth $(m+1)c$.

10. Wenn $t_1, t_2, t_3, ..$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz c bilden, $u_1, u_2, u_3, ..$ eine arithmetische Progression erster Ordnung mit der Differenz d, so bilden die Producte $t_1u_1, t_2u_2, t_3u_3, ..$ eine arithmetische Progression $(m+1)$ter Ordnung mit der letzten Differenz $(m+1)cd$.

Es sei $u_n = a + (n-1)d$, so ist

$$t_n u_n = t_n(a-d) + nt_n d.$$

Nun bilden $t_1(a-d), t_2(a-d), ..$ eine Progression $m$ter Ordnung, $t_1d, 2t_2d, ..$ eine Progression $(m+1)$ter Ordnung (9), folglich $t_1u_1, t_2u_2, ..$ eine Progression $(m+1)$ter Ordnung (8), deren letzte Differenz mit der letzten Differenz der Progression $t_1d, 2t_2d, ..$ (9) übereinstimmt.

Wenn $u_1, u_2, u_3, ..$ eine arithmetische Progression erster Ordnung mit der Differenz d bilden, so bilden demnach

$u_1^2, u_2^2, u_3^2, ..$ eine arithm. Progr. 2ter Ordnung,
$u_1^3, u_2^3, u_3^3, ..$ eine arithm. Progr. 3ter Ordnung,
$u_1^m, u_2^m, u_3^m, ..$ eine arithm. Progr. $m$ter Ordnung.

Die letzte Differenz der Progression $u_1^m, u_2^m, u_3^m, ..$ ist*)

$$1.2.3...md^m.$$

Angenommen, c sei die letzte Differenz der Progression $u_1^k, u_2^k, u_3^k, ..$, so ist nach dem Obigen $c(k+1)d$ die letzte Differenz der Progression $u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, u_3^{k+1}, ...$ Nun ist $2d^2$ die letzte Differenz der Progression $u_1^2, u_2^2, u_3^2, ..$, folglich $1.2.3d^3$ die letzte Differenz der Progression $u_1^3, u_2^3, u_3^3, ..$, u. s. w.

Wenn $u_1, u_2, u_3, ..$ eine arithmetische Progression erster Ordnung bilden und $a_0, a_1, a_2, ..$ gegebene Zahlen sind, so bilden die Werthe

$$f_1 = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + .. + a_mu_1^m$$
$$f_2 = a_0 + a_1u_2 + a_2u_2^2 + .. + a_mu_2^m$$
$$f_3 = a_0 + a_1u_3 + a_2u_3^2 + .. + a_mu_3^m$$
. . . .

eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, weil $u_1^2, u_2^2, u_3^2, ..$ eine Progression 2ter Ordnung bilden, u. s. w. (8).

11. Weil $1^3, 2^3, 3^3, ..$ eine arithmetische Progression 3ter Ordnung (10) mit dem Anfangsglied 1, den Anfangsdifferenzen 7, 12, und

*) Diese Bemerkungen sind in der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts gemacht worden. Vergl. Faulhaber academia algebrae, 1631.

der letzten Differenz 6 bilden (6), so läßt sich die Summe $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ nach (7) berechnen. Ihr Werth ist

$$n + 7\binom{n}{2} + 12\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4}$$
$$= \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}$$
$$= \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{2}^2$$

wie oben (4). Auf diesem Wege wird die Summe $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$ für jeden ganzen positiven Werth von m berechnet*). Leichter ist die recurrente Berechnung, bei der man die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen durch die Summen der niederen Potenzen derselben Zahlen ausdrückt, wie folgt**).

Nach dem binomischen Lehrsatz (§. 23) ist

$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} + \ldots$$

also insbesondere

$$2^{m+1} = 1^{m+1} + \binom{m+1}{1} 1^m + \binom{m+1}{2} 1^{m-1} + \ldots$$
$$3^{m+1} = 2^{m+1} + \binom{m+1}{1} 2^m + \binom{m+1}{2} 2^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} + \ldots$$

Indem man $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$ durch s_m bezeichnet, findet man durch Addition der Colonnen

$$\text{(I)} \quad (n+1)^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} s_m + \binom{m+1}{2} s_{m-1} + \ldots$$

eine Reihe, welche mit $\binom{m+1}{m} s_1 + s_0$ schließt, und worin

$$s_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n,$$
$$s_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}.$$

---

*) Ueber die Lösung dieser Aufgabe siehe Euler Differentialrechnung II cap. 5 und Klügel math. Wörterbuch „Potenz".

**) Die Summe der Quadrate (4, II) kommt bei Archimedes (Spiral. 10) vor. Die Summe der Biquadrate und höhern Potenzen haben Fermat u. A. gefunden. Vergl. die Anm. zu 1.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber auch

$$(n-1)^{m+1} = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} - \ldots,$$

also insbesondere

$$0 = 1^{m+1} - \binom{m+1}{1} 1^m + \binom{m+1}{2} 1^{m-1} - \ldots$$

$$1^{m+1} = 2^{m+1} - \binom{m+1}{1} 2^m + \binom{m+1}{2} 2^{m-1} - \ldots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(n-1)^{m+1} = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} - \ldots$$

Die Addition ergiebt nach der obigen Bezeichnung

$$\text{(II)} \quad 0 = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} s_m + \binom{m+1}{2} s_{m-1} - \ldots$$

Aus den Relationen (I) und (II) zwischen $s_m, s_{m-1}, \ldots$ folgen durch Addition und durch Subtraction die einfacheren Relationen

$$(n+1)^{m+1} = 1 + n^{m+1} + 2\binom{m+1}{2} s_{m-1} + 2\binom{m+1}{4} s_{m-3} + \ldots$$

$$(n+1)^{m+1} = 1 - n^{m+1} + 2\binom{m+1}{1} s_m + 2\binom{m+1}{3} s_{m-2} + \ldots$$

Insbesondere ist also:

$$(n+1)^3 + n^3 - 1 = 2 \,.\, 3\, s_2 + 2 s_0$$

$$(n+1)^5 + n^5 - 1 = 2 \,.\, 5\, s_4 + 2\binom{5}{3} s_2 + 2 s_0$$

$$(n+1)^7 + n^7 - 1 = 2 \,.\, 7\, s_6 + 2\binom{7}{3} s_4 + 2\binom{7}{5} s_2 + 2 s_0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(n+1)^4 + n^4 - 1 = 2 \,.\, 4\, s_3 + 2 \,.\, 4\, s_1$$

$$(n+1)^6 + n^6 - 1 = 2 \,.\, 6\, s_5 + 2\binom{6}{3} s_3 + 2 \,.\, 6 s_1$$

$$(n+1)^8 + n^8 - 1 = 2 \,.\, 8\, s_7 + 2\binom{8}{3} s_5 + 2\binom{8}{5} s_3 + 2 \,.\, 8 s_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Daraus folgt:

$$s_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$s_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{2n^3}{6} - \frac{n}{30}$$

$$s_6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{3n^5}{6} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$s_3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{12}$$

$$s_5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$$s_7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Anmerkung. Allgemein hat man

$$s_m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 n^{m-1} - \tfrac{1}{4}\binom{m}{3} B_3 n^{m-3} + \tfrac{1}{6}\binom{m}{5} B_5 n^{m-5} - \ldots,$$

worin die Coefficienten $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_3 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{1}{42}$, . . von Euler die Bernoulli'schen Zahlen genannt worden sind nach Jacob Bernoulli, der in seiner Ars conjectandi p. 97 die Werthe von s_1, s_2, s_3, . . in aufsteigender Ordnung berechnet und auch den Werth von s_m mitgetheilt hat.

§. 29. Die Wahrscheinlichkeit.

(Heis §. 91).

1. Wenn unter gegebenen Umständen von n Ereignissen A, B, C, . . eines wie das andere möglich ist, aber nur eines wirklich eintreten wird, entweder A, oder B, oder C, . . , so haben die einzelnen Ereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit (probabilitas), die bei zunehmender Anzahl n der möglichen Fälle abnimmt. Setzt man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bei n möglichen Ereignissen $= 1 : n$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß von den beiden Ereignissen A und B eines eintritt, $= 2 : n$, u. s. w. Ueberhaupt ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses das Verhältniß der Anzahl der günstigen Fälle (chance), in

welchen der Erwartung genügt wird, zu der Anzahl der möglichen Fälle*). Das Ereigniß ist

unmöglich, wenn seine Wahrscheinlichkeit 0;
unwahrscheinlich, wenn seine Wahrscheinlichkeit $< \frac{1}{2}$;
ungewiß, wenn seine Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$;
wahrscheinlich, wenn seine Wahrscheinlichkeit $> \frac{1}{2}$;
gewiß, wenn seine Wahrscheinlichkeit 1 ist.

Beispiel 1. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine bestimmte Numer zu werfen, ist $\frac{1}{6}$. Zwei Würfel können auf 6^2 verschiedene Arten fallen. Unter diesen Würfen sind 6 Päsche, und 6 Würfe, deren Numern die Summe 7 geben. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln einen Pasch zu werfen, $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$. Ebensogroß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 7 zu werfen.

Beispiel 2. Fünf Würfel können auf 6^5 verschiedene Arten fallen. Unter diesen Würfen kommen 3 gleiche Numern auf $\binom{5}{3}.6.5.4$ verschiedene Arten vor, weil 3 bestimmte Numern auf je 3 Würfeln stehen können, und weil 3 gleiche Numern 6fach dasind, während der 4te Würfel eine der übrigen 5, der 5te eine der übrigen 4 Numern zeigt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit 5 Würfeln 3 gleiche Numern zu werfen,

$$\frac{\binom{5}{3}.6.5.4}{6^5} = \frac{25}{162} = \frac{1}{6{,}48}.$$

Beispiel 3. Von 52 Blättern, deren je 13 von einer Farbe sind, können 3 auf $\binom{52}{3}$ verschiedene Arten gezogen werden. Diese Blätter sind $\binom{13}{3}$mal von derselben bestimmten Farbe. Also ist die Wahrscheinlichkeit, 3 gleichfarbige Blätter zu ziehen,

$$4\binom{13}{3} : \binom{52}{3} = \frac{22}{425} = \frac{1}{19{,}32}.$$

---

*) Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden zuerst um die Mitte des 17ten Jahrhunderts gestellt und gelöst, namentlich von Fermat und Pascal 1654 (Pascal oeuvres éd. Lahure II, p. 392. 429). Die Begründung und Erweiterung solcher Berechnungen hat Hugens 1657 in der Abhandlung de ratiociniis in ludo aleae begonnen. Genauere Ausführungen dieser Theorie verdankt man Jacob Bernoulli (ars conjectandi 1713, wo zuerst probabilitas, gradus certitudinis p. 211 vorkommt) und Moivre (doctrine of chances 1717, vollständiger 1738). Weiteres findet man bei Laplace théorie anal. des probab. 1812. 3me éd. 1820.

Beispiel 4. Von 90 Numern können 5 auf $\binom{90}{5}$ verschiedene Arten gezogen werden. Dabei erscheinen von 12 besetzten Numern 3 auf $\binom{12}{3}$ verschiedene Arten mit irgend 2 von den 78 unbesetzten Numern, mithin $\binom{12}{3}\binom{78}{2}$ mal. Also ist die Wahrscheinlichkeit, bei 12 besetzten Numern eine Terne zu gewinnen,

$$\binom{12}{3}\binom{87}{2} : \binom{90}{5} = \frac{1}{66{,}52}.$$

Wenn man alle Ternen der 12 Numern besetzt, so gewinnt man, so oft eine jener Ternen mit irgend 2 der übrigen Numern gezogen wird, mithin bei $\binom{12}{3}\binom{87}{2}$ Ziehungen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, eine besetzte Terne zu gewinnen,

$$\binom{12}{3}\binom{87}{2} : \binom{90}{5} = \frac{1}{53{,}4}.$$

Beispiel 5. Wenn in einer Urne a weiße, b gelbe, c rothe Kugeln sich befinden, so können $\alpha + \beta + \gamma$ Kugeln auf $\binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}$ verschiedene Arten gezogen werden. Dabei kann eine Combination von α weißen Kugeln zugleich mit einer Combination von β gelben Kugeln und einer Combination von γ rothen Kugeln $\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}$ mal vorkommen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug α weiße, β gelbe, γ rothe Kugeln zu erhalten,

$$\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma} : \binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Beispiel 6. Von n Kugeln, die in einer Urne liegen, kann man irgend wieviele auf

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots$$

verschiedene Arten ergreifen; eine ungerade Anzahl auf

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

verschiedene Arten, eine gerade Anzahl auf

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\cdots$$

verschiedene Arten. Nun ist nach dem binomischen Lehrsatz (§. 23, 4 für $x = \pm 1$)

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots = 2^n$$

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots = 0,$$

folglich

$$2 + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \ldots = 2^n$$

$$2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + \ldots \quad = 2^n,$$

oder

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = 2^{n-1} - 1$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.$$

Also sind die Wahrscheinlichkeiten, eine gerade oder eine ungerade Anzahl zu ergreifen,

$$\frac{2^{n-1} - 1}{2^n \quad - 1}, \quad \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintritt, ergänzen sich zu 1 (Gewißheit). Gesetzt, unter n Fällen sind m Fälle, in denen das Ereigniß eintritt, so giebt es unter n Fällen $n - m$ Fälle, in denen das Ereigniß nicht eintritt. Also ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\frac{m}{n}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintritt,

$$\frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 7 zu werfen, ist $\frac{1}{6}$ und die Wahrscheinlichkeit, nicht 7 zu werfen, ist $\frac{5}{6}$.

3. Die Wahrscheinlichkeit, daß unter den von einander unabhängigen Ereignissen E, F, G, . . irgend eines eintritt, entweder E, oder F, oder G, . . , ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Beweis. Wenn E, F, G einzeln die Wahrscheinlichkeiten p, q, r haben, und überhaupt unter N Fällen m_1 Fälle sind, in denen E eintritt, m_2 Fälle, in denen F eintritt, m_3 Fälle, in denen G eintritt, so giebt es unter N Fällen $m_1 + m_2 + m_3$ Fälle, in denen eines der

Ereignisse E, F, G eintritt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E, oder F, oder G eintritt,

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_3}{N}$$
$$= p + q + r.$$

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln entweder einen Pasch oder 7 zu werfen, ist $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln entweder 7, oder 8, oder 9 zu werfen, ist $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} = \frac{5}{12}$.

4. Die Ereignisse E, F, G, . . heißen conträr, wenn es gewiß ist, daß eines derselben eintritt. Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E, oder F, oder G, . . eintritt, die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse (3), und diese hat den Werth 1, weil $m_1 + m_2 + m_3 \ldots = N$. Also sind die Ereignisse E, F, G, . . conträr, wenn die Summe ihrer Wahrscheinlichkeit den Werth 1 (Gewißheit) hat.

Insbesondere sind E und Nicht-E conträr, d. h. es ist gewiß, daß entweder E eintritt, oder E nicht eintritt. In der That ergänzen sich nach (2) die Wahrscheinlichkeiten von E und von Nicht-E zu 1.

5. Bei den Ereignissen E, F, G, . . kann die relative Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E in Betracht gezogen werden, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß unter den Ereignissen E, F, G, . . das Ereigniß E eintritt. Diese relative Wahrscheinlichkeit von E ist das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit von E zu der Wahrscheinlichkeit, daß eines der Ereignisse E, F, G, . . eintritt. Denn nach den obigen Voraussetzungen (3) giebt es unter $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ Fällen m_1 Fälle, in denen E eintritt; also ist die relative Wahrscheinlichkeit von E

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\frac{m_1}{N}}{\frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_2}{N} + \ldots}$$
$$= \frac{p}{p + q + r + \ldots}.$$

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln 3 gleiche Numern zu werfen, ist $\frac{6}{6^3}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit denselben Würfeln nur 2 gleiche Numern zu werfen, ist $\binom{3}{2}\frac{6 \cdot 5}{6^3}$. Vergl. Beisp. 2 in (1). Da-

her ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln vielmehr 2 gleiche Numern als 3 gleiche Numern zu werfen,

$$\frac{3 \,.\, 6 \,.\, 5}{3 \,.\, 6 \,.\, 5 + 6} = \frac{15}{16}.$$

Wenn die gegebenen Ereignisse conträr sind (4), so ist die relative Wahrscheinlichkeit eines unter ihnen von der absoluten Wahrscheinlichkeit desselben nicht verschieden.

6. Die Wahrscheinlichkeit, daß die von einander unabhängigen Ereignisse E, F, G, . . zusammentreffen d. h. gleichzeitig oder in einer bestimmten Ordnung nach einander eintreten, ist das Product der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Beweis. Wenn unter n Fällen m Fälle sind, in denen E eintritt (nicht F), und unter n_1 Fällen m_1 Fälle, in denen F eintritt (nicht E), so giebt es unter nn_1 Fällen, in denen die Fälle der ersten Art mit den Fällen der zweiten Art zusammentreffen können, mm_1 Fälle, in denen ein Eintritt von E mit einem Eintritt von F zusammentrifft. Also ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von E und F (des zusammengesetzten Ereignisses EF)

$$\frac{mm_1}{nn_1} = \frac{m}{n}\,\frac{m_1}{n_1}.$$

Haben die Ereignisse E, F, G einzeln die Wahrscheinlichkeiten p, q, r, so hat das Zusammentreffen von E und F mit G (das Ereigniß EFG) die Wahrscheinlichkeit

$$(pq)r = pqr. \quad \text{U. s. w.}$$

Beispiel 1. Wenn die Urne U 5 weiße und 7 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 6 herausgenommenen Kugeln 2 weiße sind, $\binom{5}{2}\binom{7}{4} : \binom{12}{6}$.

Wenn die Urne V 8 weiße und 10 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 9 herausgenommenen Kugeln 4 weiße sind, $\binom{8}{4}\binom{10}{5} : \binom{18}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß unter 6 aus U genommenen Kugeln 2 weiße, und zugleich unter 9 aus V genommenen Kugeln 4 weiße sich befinden, ist demnach

$$\binom{5}{2}\binom{7}{4}\binom{8}{4}\binom{10}{5} : \binom{12}{6}\binom{18}{9} = \frac{3675}{26741} = \frac{1}{7{,}28}.$$

Beispiel 2. Haben die Ereignisse E und F die Wahrscheinlichkeiten p und q, so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens

von E und F . . . . pq,
von E und Nicht-F . . . . . $p(1 - q)$,
von Nicht-E und F . . . . . $(1 - p)q$,
von Nicht-E und Nicht-F . . $(1 - p)(1 - q)$.

Eines der 4 zusammengesetzten Ereignisse muß eintreten, also sind dieselben conträr (4). In der That ist

$$pq + p(1 - q) + (1 - p)q + (1 - p)(1 - q) = 1.$$

Beispiel 3. Haben die Ereignisse E, F, G die Wahrscheinlichkeiten p, q, r, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß E nicht eintritt und F eintritt, $(1-p)q$; die Wahrscheinlichkeit, daß E und F nicht eintreten und G eintritt, $(1 - p)(1 - q)r$; also die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E eintritt, oder daß F eintritt, wenn E nicht eintritt, oder daß G eintritt, wenn E und F nicht eintreten,

$$p + (1 - p)q + (1 - p)(1 - q)r.$$

Beispiel 4. Wenn die Urne U 5 weiße und 1 schwarze Kugel, und die Urne V 3 weiße und 4 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, in U zu greifen, $\frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß eine aus U genommene Kugel weiß ist, $\frac{5}{6}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß die ergriffene Kugel aus U und weiß ist, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, daß die ergriffene Kugel aus V und weiß ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$. Die Wahrscheinlichkeit aber, daß eine aus einer von beiden Urnen genommene Kugel weiß ist, hat den Werth (3)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{53}{84}.$$

Beispiel 5. Werden Versuche angestellt, bei denen entweder E mit der Wahrscheinlichkeit p, oder F mit der Wahrscheinlichkeit q eintritt, so daß E und F conträr sind und die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten $p + q = 1$: dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen $k$mal E und $(n - k)$mal F in einer bestimmten Ordnung eintritt, $p^k q^{n-k}$. Von k Elementen E und $n - k$ Elementen F giebt es aber $\frac{1.2 \ldots n}{1.2 \ldots k.1.2 \ldots (n-k)}$ Permutationen (§. 25, 4), also ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen $k$mal E und $(n - k)$mal F in beliebiger Ordnung eintritt,

$$\frac{1.2 \ldots n}{1.2 \ldots k.1.2 \ldots (n-k)} p^k q^{n-k}.$$

Dabei wird gewiß entweder $n$mal E, oder $(n - 1)$mal E und 1mal F, oder $(n - 2)$mal E und 2mal F, . . , oder 1mal E und $(n - 1)$mal F, oder $n$mal F eintreten. In der That haben die Wahrscheinlichkeiten, welche aus der gefundenen Formel entspringen, wenn k die Werthe $n, n - 1, . ., 1, 0$ erhält, die Summe $(p + q)^n = 1$ (§. 23).

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen wenigstens $k$mal E eintritt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß E $k$mal, $(k+1)$mal, . . ., $n$mal eintritt. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen höchstens $(k-1)$mal E eintritt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß E 0mal, 1mal, . . , $(k-1)$mal eintritt. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten ergänzen sich zu 1.

Analoge Bemerkungen gelten für mehr conträre Ereignisse, welche bei einer Reihe von Versuchen mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten eintreten.

Beispiel 6. Wenn man die Wahrscheinlichkeiten, mit einem Würfel die Numern 1, 2, 3, . . zu werfen, durch p_1, p_2, p_3, . . bezeichnet, so ist $p_1 + p_2 + p_3 + .. = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem solchen Würfel bei n Würfen $k$mal 1, $l$mal 2, $m$mal 3, . . unter der Bedingung $k + l + m + .. = n$ in beliebiger Ordnung zu werfen, ist

$$\frac{1.2...n}{1.2...k.1.2...l.1.2...m...} p_1^k p_2^l p_3^m \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeiten aber, die verschiedenen Complexionen der n Würfe zu erhalten, sind die einzelnen Glieder, aus denen die Potenz $(p_1 + p_2 + p_3 + ..)^n$ besteht (§. 27, 2).

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der n geworfenen Numern s beträgt, ist die Summe der Glieder von $(p_1 + p_2 + p_3 + ..)^n$, bei denen die Summe der Indices von p den Werth s hat. Vertauscht man p_1 mit $p_1 x$, p_2 mit $p_2 x^2$, p_3 mit $p_3 x^3$, . . , so erscheint dieselbe Wahrscheinlichkeit als Coefficient von x^s in $(p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + ..)^n$; mithin als Coefficient von x^s in $\frac{1}{6^n}(x + x^2 + .. + x^6)^n$, wenn die Würfe mit einem vollkommenen gemeinen Würfel gemacht werden, bei welchem $p_1 = p_2 = .. = \frac{1}{6}$ ist. Vergl. Moivre Misc. anal. p. 196 und Euler de partitione numerorum (Nov. Comm. Petrop. 3 und 14).

Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wurfes mit n gleichen Würfeln ist nicht verschieden von der Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei n Würfen dieselbe Complexion der Numern zu erhalten.

7. Wenn die Ereignisse E, F, G, . . die Wahrscheinlichkeiten p, q, r, . . haben und conträr sind, so daß $p + q + r + .. = 1$; wenn ferner nach Vertrag der Eintritt von E, F, G, . . zur Folge hat, daß die Person A, B, C, . . den Gewinn S erlangt, so gebühren vor der Entscheidung den einzelnen Personen die Antheile pS, qS, rS, . . . Sind nämlich überhaupt n Fälle möglich, und ebensoviel Personen

vorhanden, von denen die 1te, 2te, 3te, . . den Gewinn S erlangt, je nachdem der 1te, 2te, 3te, . . Fall eintritt, so haben alle Personen gleichen Anspruch auf S, folglich gebührt vor der Entscheidung einer jeden Person $\frac{S}{n}$. Wenn nun unter den n Fällen m Fälle sind, in denen das Ereigniß E eintritt, so vereinigt die Person A in sich die Ansprüche von m jener Personen, folglich gebührt ihr vor der Entscheidung $\frac{m}{n} S$ d. i. pS. U. s. f. In der That ist

$$pS + qS + rS + . . = (p + q + r + . .)\, S = S.$$

Die Producte des erwarteten Gewinns mit den Wahrscheinlichkeiten der Erlangung heißen die **Hoffnungen** (partis, exspectationes, sortes) der verschiedenen Personen auf den Gewinn, und verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die Wahrscheinlichkeiten, daß der volle Gewinn den einzelnen Theilnehmern zufällt.

Wenn der durch den Eintritt eines der conträren Ereignisse E, F, G, . . von einer der Personen A, B, C, . . zu erlangende Gewinn S von den Theilnehmern des Vertrags aufgebracht werden soll, so müssen die Beiträge derselben pS, qS, rS, . . d. h. ihren Hoffnungen gleich sein, also zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E, F, G, . . welche die verschiedenen Personen erwarten. Dieselben Beiträge sind von A, B, C, . . zu leisten, wenn sie zur Wette oder zum Glücksspiele sich vereinigen mit der Bedingung, daß A, B, C, . . die Summe der Einsätze gewinnt, je nachdem E, F, G, . . eintritt.

Wenn insbesondere A behauptet, daß das Ereigniß E eintreten werde, B aber das Gegentheil behauptet, und beide zu einer **Wette** sich vereinigen, so hat der eine pS, der andere $(1 - p)S$ einzusetzen, d. h. B hat dem A das $\frac{1 - p}{p}$fache entgegenzubieten.

Einsatz und Gewinn des Spielers sollen sich verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen und zu verlieren. Dem Einsatz des Spielers wird von der Lotterie oder Spielbank ein Gewinn entgegengesetzt, der die erforderliche Höhe meist nicht erreicht; man rechnet auf die Lust der Menge am Gewinn ohne Arbeit.

§. 30. Die Kettenbrüche.

(Heis §. 85 ff.).

1. Wenn man aus den Größen a und b durch successive Divisionen die Kette von Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= bq + c \\ b &= cr + d \\ c &= ds + e \end{aligned}$$

u. s. w. bildet, so ist

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{q + \frac{c}{b}}, \quad \frac{c}{b} = \frac{1}{r + \frac{d}{c}}, \ldots$$

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

Diese Entwickelung von $b : a$ heißt ein Kettenbruch (fractio continua), gebildet aus den Gliedern $\frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \frac{1}{s}, \ldots$, und wird deshalb auch wie folgt bezeichnet*)

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{q} \dot{+} \frac{1}{r} \dot{+} \frac{1}{s} \dot{+} \ldots$$

Die übergesetzten Puncte deuten an, daß das Folgende zu dem jedesmal vorhergehenden Nenner gehört.

Der Kettenbruch bleibt unverändert, wenn man den Zähler und den Nenner eines Gliedes und zugleich den Zähler des folgenden Gliedes mit derselben Zahl multiplicirt, weil z. B.

---

*) Von den der neuern Zeit angehörigen Kettenbrüchen (fractio continue fracta) hat Lord Brouncker um 1605 eine berühmte Anwendung gemacht (Wallis opp. I p. 469). Bald darauf gebrauchte Hugens die Kettenbrüche und gab eine Theorie derselben (Automatum planetarium um 1682 verfaßt). Euler hat den Namen fractio continua eingeführt (Comm. Petrop. 9.); der Ausdruck Kettenbruch ist im Anfang des 19ten Jahrh. üblich geworden; die obige Bezeichnung rührt von J. H. T. Müller her, Allg. Arithm. 1838. Besondern Zuwachs erhielt die Lehre von den Kettenbrüchen durch Euler (Nov. Comm. 9. Acta 1779 I), Lambert (Beiträge II, 1 p. 55 und 140), Lagrange (Zusätze zur franz. Ausgabe von Euler's Algebra, Lyon 1795), Gauß Disq. gen. circa seriem inf. 1812, Möbius Crelle J. 6 p. 215. Die hier mitgetheilte Auffassung dieser Lehre hat man Scheibner zu verdanken. Berichte der Leipz. Ges. d. W. 1864.

$$\frac{m}{mr + mx} = \frac{1}{r + x}.$$

2. Aus der allgemeinern Kette von Gleichungen

$$\begin{array}{llll} p_1 u & - q_1 u_1 & + u_2 & = 0 \\ p_2 u_1 & - q_2 u_2 & + u_3 & = 0 \\ . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \\ p_i u_{i-1} & - q_i u_i & + u_{i+1} & = 0 \\ . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \end{array}$$

findet man

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1 - \frac{u_2}{u_1}}, \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{q_2 - \frac{u_3}{u_2}}, \ldots$$

und daher den Kettenbruch

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3} \dot{-} \ldots$$

Die Größen $u_2, u_3, u_4, \ldots$ können nach und nach sämmtlich durch u und u_1 mit Hülfe von $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ ausgedrückt werden. Aus den Resultaten

$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u, \quad u_{i+1} = \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u$$

erhält man dann

$$\frac{u_1}{u} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{u_i}{\mu_i u}, \quad \frac{u_1}{u} - \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{u_{i+1}}{\mu_{i+1} u}.$$

Wenn nun $\frac{u_i}{\mu_i}$ und $\frac{u_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ entgegengesetzte Zahlen sind, so liegt der Kettenbruch $\frac{u_1}{u}$ zwischen den Grenzen $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ und $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$, welche deshalb Näherungsbrüche heißen. Und wenn u_n verschwindet, so ist $\frac{u_1}{u} = \frac{\lambda_n}{\mu_n}$.

Demnach hat man

$$\begin{array}{ll} \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{p_1}{q_1}, & \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3} \dot{-} \ldots \\ \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2}{q_2}, & \frac{u_3}{u_2} = \frac{p_3}{q_3} \dot{-} \frac{p_4}{q_4} \dot{-} \ldots \\ \frac{\lambda_4}{\mu_4} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3}, & \frac{u_4}{u_3} = \frac{p_4}{q_4} \dot{-} \frac{p_5}{q_5} \dot{-} \ldots \end{array}$$

u. s. w.

3. Zur Bestimmung der Größen λ_i und μ_i genügt die Bemerkung, daß nach (2) für beliebige Werthe von u und u_1

$$p_i(\mu_{i-1} u_1 - \lambda_{i-1} u) - q_i(\mu_i u_1 - \lambda_i u) + \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u = 0$$

sein muß. Dazu wird erfordert, daß die Coefficienten von u und u_1 verschwinden (Algebra §. 4), d. h.

$$\lambda_{i-1} p_i - \lambda_i q_i + \lambda_{i+1} = 0$$
$$\mu_{i-1} p_i - \mu_i q_i + \mu_{i+1} = 0.$$

Dieses System dient zur successiven Berechnung der Größen λ und μ. Denn man hat

$$u_1 = \mu_1 u_1 - \lambda_1 u, \text{ folglich } \lambda_1 = 0, \ \mu_1 = 1$$
$$u_2 = \mu_2 u_1 - \lambda_2 u, \text{ folglich } \lambda_2 = p_1, \ \mu_2 = q_1$$

und demnach

$$\lambda_3 = \lambda_2 q_2 - \lambda_1 p_2 \qquad \mu_3 = \mu_2 q_2 - \mu_1 p_2$$
$$\lambda_4 = \lambda_3 q_3 - \lambda_2 p_3 \qquad \mu_4 = \mu_3 q_3 - \mu_2 p_3$$

u. s. w.

4. Aus dem gefundenen System (3)

$$\lambda_{i-1} p_i - \lambda_i q_i + \lambda_{i+1} = 0$$
$$\mu_{i-1} p_i - \mu_i q_i + \mu_{i+1} = 0$$

folgen die Relationen

$$\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i \mu_{i+1} = (\lambda_i \mu_{i-1} - \lambda_{i-1}\mu_i) p$$
$$\lambda_{i+1}\mu_{i-1} - \lambda_{i-1}\mu_{i+1} = (\lambda_i \mu_{i-1} - \lambda_{i-1}\mu_i) q_i.$$

Nun ist $\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2 = p_1$, folglich $\lambda_3\mu_2 - \lambda_2\mu_3 = p_1 p_2, \ldots$, also

$$\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i\mu_{i+1} = p_1 p_2 \cdots p_i$$

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{p_1 \cdots p_i}{\mu_i \mu_{i+1}}, \qquad \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} = \frac{p_1 \cdots p_{i-1} q_i}{\mu_{i-1} \mu_{i+1}}.$$

Daher ergiebt sich

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) + \cdots + \left(\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)$$

$$= \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_1 p_2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{p_1 p_2 p_3}{\mu_3 \mu_4} + \cdots + \frac{p_1 \cdots p_i}{\mu_i \mu_{i+1}}$$

zur Auflösung eines Kettenbruchs in ein Polynomium, nach welchem der Kettenbruch beurtheilt werden kann, besonders in dem Falle, daß die Anzahl seiner Glieder unendlich groß ist.

5. Aus dem obigen System (2)

$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u$$
$$u_{i+1} = \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u$$

folgen die Relationen

$$\mu_{i+1} u_i - \mu_i u_{i+1} = (\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}) u$$
$$\lambda_{i+1} u_i - \lambda_i u_{i+1} = (\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}) u_1$$

also (4)

$$\mu_{i+1} u_i - \mu_i u_{i+1} = p_1 \,.\,.\, p_i u.$$

Eine ähnliche Relation besteht zwischen 3 beliebigen Größen u und kann aus dem System

$$u_h = \mu_h u_1 - \lambda_h u$$
$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u$$
$$u_k = \mu_k u_1 - \lambda_k u$$

abgeleitet werden.

6. Aus den gefundenen Werthen (4) ergiebt sich

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} : \frac{\lambda_i}{\mu_i} - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} = \frac{\mu_{i-1} p_i}{\mu_{i+1}}.$$

Wenn nun die Zahlen p_2, p_3, .. negativ und die Zahlen q positiv sind, so wird $\mu_{i+1} > - \mu_{i-1} p_i$ (3) d. h. die Differenzen der folgenden Brüche $\frac{\lambda}{\mu}$ bilden eine fallende Reihe mit abwechselnden Zeichen. Nun ist

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} - \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{p_1 p_2}{\mu_2 \mu_3}$$

negativ, folglich

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} - \frac{\lambda_3}{\mu_3} > \frac{\lambda_4}{\mu_4} - \frac{\lambda_3}{\mu_3} > \frac{\lambda_4}{\mu_4} - \frac{\lambda_5}{\mu_5} > \frac{\lambda_6}{\mu_6} - \frac{\lambda_5}{\mu_5} > \,.\,.$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} > \frac{\lambda_4}{\mu_4} > \frac{\lambda_6}{\mu_6} > \,.\,.$$

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} < \frac{\lambda_5}{\mu_5} < \frac{\lambda_7}{\mu_7} < \,.\,.$$

7. Wenn die Zahlen p Einheiten und die Zahlen q ganze Zahlen sind, so sind λ_i und μ_i relative Primzahlen. Denn ihr größter gemeinschaftlicher Divisor geht in $\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}$ auf, und kann demnach (4) eine Einheit nicht übersteigen.

Wenn $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = \,.\,. = -1$ und q_1, q_2 .. positive

ganze Zahlen sind, so bilden die Größen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \mu_2, \mu_3, \ldots$ steigende Reihen, und zwei folgende Näherungsbrüche können nicht den Quotienten ganzer Zahlen a und b einschließen, von denen b zwischen den Nennern der beiden Näherungsbrüche liegt. Wäre

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i} < \frac{a}{b} < \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}},$$

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} > \frac{a}{b} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \text{ d. h. } \frac{1}{\mu_{i+1}} > \frac{a\mu_i - b\lambda_i}{b},$$

so wäre

$$b > (a\mu_i - b\lambda_i)\mu_{i+1} > \mu_{i+1}$$

weil $a\mu_i - b\lambda_i$ ganz und von 0 verschieden ist.

Beispiel. Um einen Quotienten ganzer Zahlen durch Quotienten kleinerer ganzer Zahlen mit größter Annäherung auszudrücken, verwandelt man ihn nach (1) in einen Kettenbruch und berechnet die Näherungsbrüche. Man findet

$$\frac{5829}{7834} = \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{2} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{9} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{3} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{6} \dot{+} \frac{1}{3}$$

mit den irreduciblen Näherungsbrüchen

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{29}{39}, \frac{32}{43}, \frac{125}{168}, \frac{157}{211}, \frac{282}{379}, \frac{1849}{2485}.$$

Die Brüche $\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{32}{43}, \ldots$ bilden eine bis zu dem gegebenen Bruch fallende Reihe, die Brüche $\frac{2}{3}, \frac{29}{39}, \ldots$ eine ebendahin steigende Reihe. Der gegebene Bruch wird durch den Bruch $\frac{125}{168}$ mit dem Fehler $\frac{1}{168\,.\,211} < \frac{1}{168^2}$ ausgedrückt, und genauer als durch irgend einen Bruch, dessen Nenner 211 nicht erreicht und dessen Zähler eine ganze Zahl ist.

8. Wenn $p_1, p_2, p_3, \ldots$ positive ganze Zahlen sind, so hat der unendliche Kettenbruch

$$\frac{p_1}{p_1+1} \dot{-} \frac{p_2}{p_2+1} \dot{-} \frac{p_3}{p_3+1} \dot{-} \ldots$$

den Werth 1*). Denn man hat (3)

*) Vergl. Legendre Géom. Note 4.

$$\lambda_{i-1} p_i - \lambda_i(p_i + 1) + \lambda_{i+1} = 0,$$
$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = (\lambda_i - \lambda_{i-1}) p_i.$$

Nun ist $\lambda_3 - \lambda_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) p_2 = p_1 p_2, \ldots$, also $\lambda_{i+1} - \lambda_i = p_1 \ldots p_i$ d. h. $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \mu_2, \mu_3, \ldots$ sind steigende Reihen positiver ganzer Zahlen. Ferner hat man

$$\mu_{i+1} - \lambda_{i+1} = (\mu_i - \lambda_i)(p_i + 1) - (\mu_{i-1} - \lambda_{i-1}) p_i.$$

Nun ist $\mu_1 - \lambda_1 = 1$, $\mu_2 - \lambda_2 = 1$, $\mu_3 - \lambda_3 = p_2 + 1 - p_2 = 1$, u. s. w. Folglich $1 - \frac{\lambda_i}{\mu^i} = \frac{1}{\mu_i}$ und

$$\lim \frac{\lambda_i}{\mu_i} = 1, \quad i = \infty.$$

9. Wenn $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ positive ganze Zahlen sind und von einer bestimmten Numer an $q_i > p_i + 1$, $q_{i+1} > p_{i+1} + 1, \ldots$, so hat der aus unendlich viel positiven oder negativen Gliedern $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ gebildete Kettenbruch einen irrationalen Werth unter 1.

Beweis. Man bilde für den gegebenen Kettenbruch Reste von der Form

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k} \dot{\underset{-}{+}} \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \dot{\underset{-}{+}} \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} \dot{\underset{-}{+}} \ldots$$

Dann hat man

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k \pm \frac{v_{k+1}}{v_k}}, \quad \pm v_{k+1} = v_{k-1} p_k - v_k q_k.$$

Also sind, wenn z. B. v_{i-1} und v_i ganze Zahlen sind, alle v ganze Zahlen, und der Kettenbruch hat einen rationalen Werth.

Nach der Voraussetzung ist aber

$$p_i < q_i - 1 < q_i \pm \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$$

folglich

$$\frac{p_i}{q_i \dotplus \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} < 1, \quad \frac{p_{i+1}}{q_{i+1} \dotplus \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}}} < 1, \ldots$$

$$\frac{p_i}{q_i} \dotplus \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} < 1$$

$$\frac{p_i}{q_i} \dotplus \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} \dotplus \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}} < 1$$

u. s. w. Also sind $\frac{v_i}{v_{i-1}}$, $\frac{v_{i+1}}{v}$, $\frac{v_{i+2}}{v_{i+1}}$, .. echte Brüche.

Gesetzt nun, v_{i-1} und v_i wären ganze Zahlen, so bildeten die ganzen Zahlen v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, .. eine fallende Reihe mit der Grenze 0, gegen die Voraussetzung, daß kein Rest des gegebenen Kettenbruchs verschwindet. Demnach kann der Kettenbruch einen rationalen Werth nicht haben.

§. 31. Die Exponentialreihe.

1. Unter einer unendlichen Reihe*) wird ein Polynomium von unendlich viel Gliedern verstanden. Wenn man mit dem ersten Gliede immer mehr folgende Glieder einer unendlichen Reihe vereinigt, und dabei Werthe erhält, welche mit einem bestimmten endlichen Werth mehr und mehr zusammenfallen, so heißt die unendliche Reihe convergent. Bei mangelnder Convergenz ist die unendliche Reihe kein brauchbarer Ausdruck einer Größe und heißt divergent. Die einfachsten Beispiele convergenter Reihen sind der unendliche Decimalbruch und die unendliche fallende geometrische Progression. Wenn x real und ein echter Bruch ist, so convergirt die unendliche Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$ gegen den Werth $\frac{1}{1-x}$ (§. 12 und 22).

Wenn die Glieder der unendlichen Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ positiv real sind und von einem bestimmten Glied $a_k x^k$ an eine fallende geometrische Progression bilden, deren Verhältniß $q < 1$ ist, oder die Glieder dieser Progression nicht erreichen, so ist

$$a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots \leqq a_k x^k (1 + q + q^2 + \ldots)$$

*) Series infinita nach Newton, welcher zuerst unendliche Reihen zur Darstellung von Größen in umfassender Weise angewendet hat.

und die unendliche Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ..$ convergirt, weil sie den Werth der endlichen Reihe

$$a_0 + a_1x + .. + a_{k-1}x^{k-1} + \frac{a_kx^k}{1-q}$$

nicht übersteigt.

Wenn in einer convergenten unendlichen Reihe von positiven Gliedern einzelne Glieder ihr Zeichen wechseln, so sinkt der Werth der unendlichen Reihe um eine endliche Differenz, und die unendliche Reihe convergirt wie vorher.

Wenn in der convergenten unendlichen Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ..$ von positiven Gliedern x mit $x\sqrt{-1}$ vertauscht worden ist, so besteht die Reihe aus einer unendlichen Reihe von realen Gliedern und aus einer unendlichen Reihe von imaginären Gliedern. Diese Reihen convergiren aber einzeln gegen niedere Grenzen, als die vollständige unendliche Reihe von lauter positiven Gliedern.

2. Wenn die unendliche Reihe $a_0 + a_1z + a_2z^2 + ..$ bei verschiedenen Werthen von z convergirt, so ist ihr Werth von z abhängig, eine Function von z (Algebra §. 2), und wird durch $f(z)$ bezeichnet, so daß

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ..$$
$$f(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + ..$$
$$f(x+y) = a_0 + a_1(x+y) + a_2(x+y)^2 + ..$$

Wenn nun $f(x)$ so beschaffen sein soll, daß $f(x)f(y) = f(x+y)$ ist, so können die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, ..$ nicht von einander unabhängig sein. Der Forderung

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

wird genügt, wenn die Differenz

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ..)(a_0 + a_1y + a_2y^2 + ..)$$
$$- a_0 - a_1(x+y) - a_2(x+y)^2 - ..$$

bei allen in Betracht kommenden Werthen x, y verschwindet. Nun ist

$$(x+y)^m = x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}y + \binom{m}{2}x^{m-2}y^2 + ..$$

nach §. 23; also besteht jene Differenz aus Gliedern von der Form

$$x^{m-k}y^k\left\{a_{m-k}a_k - a_m\binom{m}{k}\right\},$$

und diese müssen einzeln verschwinden, damit die Differenz bei allen Werthen x, y verschwindet (Algebra §. 4). Dazu ist es erforderlich, daß

$$a_m = a_{m-k} a_k : \binom{m}{k}$$

und insbesondere $a_m = a_{m-1} \frac{a_1}{m}$ ist. Aus den Relationen

$$a_1 = a_0 a_1, \quad a_2 = a_1 \frac{a_1}{2}, \quad a_3 = a_2 \frac{a_1}{3}, \ldots$$

erkennt man endlich, daß $a_0 = 1$,

$$a_2 = \frac{a_1{}^2}{1.2}, \; a_3 = \frac{a_1{}^3}{1.2.3}, \ldots, a_k = \frac{a_1{}^k}{1.2\ldots k},$$

während a_1 unbestimmt bleibt.

3. Die unendliche Reihe $1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$ convergirt bei jedem endlichen Werth von z. Wenn zunächst z einen positiven realen endlichen Werth hat, und $k > z$ genommen wird, so ist die Reihe vom $k$ten Gliede an fallend:

$$\frac{z^k}{1\ldots k} + \frac{z^{k+1}}{1\ldots(k+1)} + \ldots = \frac{z^{k-1}}{1\ldots(k-1)} \left\{ \frac{z}{k} + \frac{z^2}{k(k+1)} + \ldots \right\}.$$

Nun ist $\frac{z^2}{k(k+1)} < \frac{z^2}{k^2}, \; \frac{z^3}{k(k+1)(k+2)} < \frac{z^3}{k^3}, \ldots$ und

$$\frac{z}{k} + \frac{z^2}{k^2} + \ldots = \frac{z : k}{1 - z : k} = \frac{z}{k - z}$$

folglich der Rest der unendlichen Reihe

$$\frac{z^k}{1\ldots k} + \frac{z^{k+1}}{1\ldots(k+1)} + \ldots < \frac{z^{k-1}}{1\ldots(k-1)} \, \frac{z}{k - z}.$$

Die gegebene unendliche Reihe convergirt ebenfalls, wenn z einen negativen realen oder einen imaginären endlichen Werth hat (1). Das Product einer endlichen Anzahl von convergenten unendlichen Reihen giebt eine convergente unendliche Reihe. Nun ist bei realen oder imaginären endlichen Werthen von x und y

$$\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots\right)$$

$$\begin{aligned} = 1 &+ \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{y}{1} + \frac{x}{1}\frac{y}{1} + \frac{x^2}{1.2}\frac{y}{1} + \ldots \\ &\qquad + \frac{y^2}{1.2} + \frac{x}{1}\frac{y^2}{1.2} + \ldots \\ &\qquad\qquad + \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad + \ldots \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \ldots$$

weil (§. 23)

$$\frac{x^k}{1\,.\,.\,k} + \frac{x^{k-1}}{1\,.\,.(k-1)}\,\frac{y}{1} + \frac{x^{k-2}}{1\,.\,.(k-2)}\,\frac{y^2}{1\,.\,2} + \,.\,. = \frac{(x+y)^k}{1\,.\,.\,k}.$$

Also convergirt die gegebene unendliche Reihe auch bei complexen endlichen Werthen von z.

4. Von besonderer Wichtigkeit ist der Werth, welchen die convergente unendliche Reihe

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \,.\,.$$

für $z = 1$ annimmt, nämlich

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1.2.3} + \,.\,. = 2{,}718\,28\,.\,.(§.\ 19,\ 3).$$

Man findet denselben aus den ersten k Gliedern der Reihe mit einem Fehler, welcher den $(k-1)$ten Theil des $k$ten Gliedes nicht erreicht (3). Dieser Werth ist irrational*) und wird nach Euler (Introd. I §. 122) durch e bezeichnet.

Wäre e der Quotient der ganzen Zahlen r und s, so fände man durch Multiplication der unendlichen Reihe mit $1\,.\,2\,.\,.\,.\,s$ eine Summe von ganzen Zahlen nebst den gebrochenen Gliedern

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \,.\,.$$

welche weniger betragen als

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} + \,.\,. = \frac{1}{s}.$$

Nun ist $(r : s)\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,s$ eine ganze Zahl, also drückt $r : s$ den Werth e der unendlichen Reihe nicht vollkommen aus.

5. Die unendliche Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \,.\,.$$

hat bei realen Werthen von x den Werth e^x und wird die Exponentialreihe genannt, weil sie aus den steigenden Potenzen des Expo-

---

*) Daß e und π (s. unten 8), sowie e^x bei rationalen Werthen von x irrational ist, hat Lambert 1761 zuerst bewiesen (Beiträge II, 1 p. 159. Vergl. Legendre Géom. Note 4). Der hier gegebene einfache Beweis für die Irrationalität von e ist von Fourier geführt und von Stainville (Mélanges d'anal. 1815 p. 339) mitgetheilt worden.

nenten gebildet ist*). Bei imaginären und complexen Werthen von x dient die Reihe zur Erklärung der Potenz e^x. Für Potenzen mit imaginären und complexen Exponenten gelten dieselben Rechnungsregeln, als für Potenzen mit realen Exponenten.

Beweis. Bezeichnet man den Werth der unendlichen Reihe durch $f(x)$, so hat man bei beliebigen endlichen Werthen von x und y (3)

$$f(x)\,f(y) = f(x+y),$$

folglich

$$[f(x)]^2 = f(2x)$$
$$[f(x)]^3 = f(1x)\,f(x) = f(3x)$$

und für positive ganze m und n

$$[f(x)]^m = f(mx)$$
$$\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n = f(x), \quad [f(x)]^{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{x}{n}\right),$$
$$\left[f(x)\right]^{\frac{m}{n}} = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m = f\left(\frac{m}{n}x\right).$$

Ferner hat man $f(x)f(-x) = f(0) = 1$, also

$$\left[f(x)\right]^{-\frac{m}{n}} = 1 : \left[f(x)\right]^{\frac{m}{n}} = 1 : f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(-\frac{m}{n}x\right).$$

Daher ist für reale Werthe von y, sie mögen positiv oder negativ, ganz oder gebrochen oder irrational (durch Brüche begrenzbar) sein,

$$[f(x)]^y = f(xy).$$

In dem Falle aber, daß y imaginär oder complex ist, wird $[f(x)]^y$ durch die Reihe $f(xy)$ erklärt. Nun ist $f(1) = e$ (4), folglich

$$e^x = f(x), \quad e^y = f(y)$$
$$e^x\,e^y = f(x)\,f(y) = f(x+y) = e^{x+y}$$
$$(e^x)^y = f(xy) = e^{xy} = (e^y)^x$$

wie bei Potenzen mit realen Exponenten (§. 17 und 18).

---

*) Diese Reihe ist zur Berechnung des Numerus aus seinem natürlichen Logarithmus von Newton aufgestellt worden (Oldenburg an Leibniz 1676 Jul. 26). Potenzen in ihre Abhängigkeit von dem Exponenten wurden von Joh. Bernoulli 1697 unter dem ihm von Leibniz vorgeschlagenen Namen „Exponential-Größen" in Betracht gezogen (Opp. I p. 179). Imaginäre Exponenten scheint Euler zuerst gebraucht zu haben (Introd. I §. 138. Brief an Goldbach 1741 Dec. 9), obschon Joh. Bernoulli seit 1702 den Zusammenhang logarithmischer und cyclometrischer Differentialformeln durch Benutzung der imaginären Zahlen aufgeklärt hat (Opp. I, n⁰ 70 und 89). Die Exponentialreihe wurde bisher aus der Binomialreihe abgeleitet (Euler Introd. I §. 115. Vergl. Nov. Comm. Petrop. 19 p. 103 und die §. 23 citirten Abhandlungen, Cauchy Anal. algébr. c. 6 und 9). Die umgekehrte Anordnung, welche sich durch Einfachheit empfiehlt und umfassende Betrachtung gestattet, hat man Scheibner zu verdanken.

6. Bezeichnet man durch x das Verhältniß eines Kreisbogens zu seinem Radius (des zugehörigen Centriwinkels zu dem πten Theil von 180^0), und durch $g(x)$ die complexe Zahl $\cos x + i \sin x$, und setzt man in derselben Bedeutung $g(y) = \cos y + i \sin y$, so ist aus goniometrischen Gründen (Trignom. §. 4)

$$g(x)g(y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)$$
$$= \cos(x+y) + i \sin(x+y) = g(x+y)$$

wodurch die Vergleichung von $g(x)$ mit e^{ix} angezeigt ist (2). Dazu bilde man

$$\frac{g(x+y) - g(x)}{y} = \frac{g(y) - 1}{y} g(x) = \left(\frac{\cos y - 1}{y} + i \frac{\sin y}{y}\right) g(x),$$
$$\frac{e^{i(x+y)} - e^{ix}}{y} = \frac{e^{iy} - 1}{y} e^{ix}.$$

Wenn y verschwindet, so ist

$$\lim \frac{\cos y - 1}{y} = 0, \quad \lim \frac{\sin y}{y} = 1, \quad \lim \frac{e^{iy} - 1}{y} = i,$$
$$\lim \frac{g(x+y) - g(x)}{y} = ig(x), \quad \lim \frac{e^{i(x+y)} - e^{ix}}{y} = ie^{ix}$$

d. h. wenn $g(x)$ und e^{ix} bei irgend einem x übereinstimmten, so würden die Aenderungen, die sie durch Aenderung von x um ein verschwindendes y erleiden, einander gleich sein, also könnten die beiden Functionen auch bei andern Werthen von x nicht von einander verschieden sein. Nun findet die Uebereinstimmung von $g(x)$ und e^{ix} bei $x = 0$ statt, also

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

und durch Vergleichung dieser complexen Formeln (§. 16, 7)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

zur Berechnung des Cosinus und Sinus eines Kreisbogens oder Winkels*).

7. Unabhängig von geometrischen Gründen wird der Cosinus und der Sinus einer (realen, imaginären, complexen) Zahl x als der reale

---

*) Diese beiden Reihen verdankt man Newton. Brief Oldenburg's an Leibniz 1675 Apr. 12. Euler hat dieselben aus den Werthen von $\cos xy$ und $\sin xy$ (7) entwickelt und die Gleichung $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ aus derselben Quelle abgeleitet. Introd. I §. 132 ff.

Theil und als der durch i dividirte imaginäre Theil der complexen Größe e^{ix} erklärt*), nämlich

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \,.\,.$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \,.\,.$$

Man erkennt unmittelbar, daß

$$\cos 0 = 1, \quad \cos(-x) = \cos x$$
$$\sin 0 = 0, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

I. Aus $\cos x + i\sin x = e^{ix}$ und $\cos x - i\sin x = e^{-ix}$ folgt

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Diese Ausdrücke führen zu einfachen Entwickelungen von

$$(2\cos x)^m, \quad (2i\sin x)^m$$

$$\frac{\sin mx}{\sin x}, \quad \frac{\sin 2mx}{\cos x}, \quad \frac{\cos(2m+1)x}{\cos x}$$

in dem Falle, daß m eine positive ganze reale Zahl ist.

II. Aus $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ folgt

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)$$

und durch Vergleichung dieser Complexen

$$\cos(x + y = \cos x \sin y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Aehnliche Relationen für $\cos(x+y+z+\,.\,.\,.)$ und $\sin(x+y+z+\,.\,.)$ ergeben sich aus $e^{i(x+y+z+\,.\,.)} = e^{ix}e^{iy}e^{iz}\,.\,.\,.$

III. Aus $(e^{ix})^y = e^{ixy} = (e^{iy})^x$ folgt

$$(\cos x + i\sin x)^y = \cos xy + i\sin xy = (\cos y + i\sin y)^x$$

$$\cos xy = \frac{(\cos x + i\sin x)^y + (\cos x - i\sin x)^y}{2}$$

$$\sin xy = \frac{(\cos x + i\sin x)^y - (\cos x - i\sin x)^y}{2i}$$

Die erste dieser Gleichungen, welche die Potenzirung der Complexen $\cos x + i\sin x$ lehrt, ist unter dem Namen „Moivre'scher Satz" bekannt, obwohl sie in dieser Form erst bei Euler a. a. O. vorkommt. Moivre hatte die Werthe von $\cos xy$ und $\sin xy$ gegeben Miscell. anal. 1730 p. 1. Die Entwickelung von $\cos mx$ und $\sin mx$ bei positiven ganzen Werthen von m nach den Potenzen von $\cos x$ oder von

---

*) Vergl. Missery Théorie des quant. imag. 1801. Lacroix Compl. d'alg. Note C.

sin x war von Vieta begonnen, von Jac. Bernoulli (Mém. de Paris 1702. Opp. II n⁰ 97) vollendet worden. Vergl. Klügel math. W. 2 p. 613.

8. Bei realen endlichen Werthen von x sind $\cos x$ und $\sin x$ real endlich und liegen zwischen den Grenzen 1 und — 1, weil die Summe ihrer Quadrate 1 beträgt (7, I). Nun ist

$$\cos 1 = \left(1 - \frac{1}{1.2}\right) + \frac{1}{1..4}\left(1 - \frac{1}{5.6}\right) + .. > 0$$

$$\cos 2 = -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{1..6}\left(1 - \frac{2^2}{7.8}\right) - .. < 0$$

also giebt es einen Werth von x zwischen 1 und 2, bei welchem $\cos x$ verschwindet. Bezeichnet man diesen Werth, den die üblichen Annäherungsmethoden $= 1{,}570$ . . ergeben (Algebra §. 8), nach Euler's Vorgang (Introd. I §. 126) durch $\frac{1}{2}\pi$, so hat man

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1,$$

weil $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ und $\sin x > 0$, während x zwischen 1 und 2 liegt. Daher ist (7, III)

$$e^{i.\frac{1}{2}\pi} = \cos\tfrac{1}{2}\pi + i\sin\tfrac{1}{2}\pi = i$$
$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$
$$e^{i.\frac{3}{2}\pi} = \cos\tfrac{3}{2}\pi + i\sin\tfrac{3}{2}\pi = -i$$
$$e^{i.2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$
$$e^{i(x+\frac{1}{2}\pi)} = ie^{ix}$$
$$e^{i(x+\pi)} = -e^{ix}$$
$$e^{i(x+\frac{3}{2}\pi)} = -ie^{ix}$$
$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}$$

Durch Vergleichung dieser Complexen ergiebt sich unmittelbar

$$\cos\pi = -1 \qquad \cos\tfrac{3}{2}\pi = 0 \qquad \cos 2\pi = 1$$
$$\sin\pi = 0 \qquad \sin\tfrac{3}{2}\pi = -1 \qquad \sin 2\pi = 0$$
$$\cos(x + \tfrac{1}{2}\pi) = -\sin x \qquad \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi) = \cos x$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos x \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x$$
$$\cos(x + \tfrac{3}{2}\pi) = \sin x \qquad \sin(x + \tfrac{3}{2}\pi) = -\cos x$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

wenn k eine reale ganze Zahl bedeutet. Demnach sind $\cos x$ und $\sin x$ real-periodisch d. h. die Werthe bleiben unverändert, wenn man x um 2π vermehrt oder vermindert. Dagegen ist

$$e^x = e^{x + i.2\pi}$$

imaginär-periodisch d. h. e^x bleibt unverändert, wenn man den Exponenten x um $i.2\pi$ vermehrt oder vermindert.

Der kleinste positive Winkel, dessen Cosinus verschwindet, ist recht, und der ihm concentrisch eingeschriebene Kreisbogen beträgt den 4ten Theil der Peripherie. Also ist $\frac{1}{2}\pi$ das Verhältniß des 4ten Theils der Peripherie zum Radius, π das Verhältniß der Peripherie zum Diameter (Ludolph'sche Zahl, numerus Ceulenius. Planim. §. 13).

Die realen Ausdrücke $\cos ix$ und $-i\sin ix$ sind unter den von Riccati herrührenden Namen hyperbolischer Cosinus und Sinus der realen Zahl x betrachtet worden, namentlich von Lambert (Mém. de Berlin 1768 p. 330) und von Gudermann (Crelle's Journal, Bd. 6 ff. Theorie der Potentialfunctionen, Berlin 1833). Tabellen derselben hat Gronau 1863 neu herausgegeben. Vergl. Hoüel Nouv. Ann. 1864 p. 1.

Nach Analogie der Zerlegung von e^x in den hyperbolischen Cosinus und Sinus von x

$$e^{-x} = \mathrm{Coh}\, x - \mathrm{Sih}\, x$$

hat man, unter der Voraussetzung daß α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 bedeutet, die Glieder der Exponentialreihe $e^{\alpha x}$ in m Reihen vertheilt

$$e^{\alpha x} = \varphi_0(x) + \alpha\varphi_1(x) + \alpha^2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha^{m-1}\varphi_{m-1}(x),$$

welche mit Cosinus und Sinus gewisse Eigenschaften gemein haben. Vergl. Olivier Crelle's J. 2 p. 243. Hellwig Grunert's Archiv 21 p. 43.

9. Wenn p und q reale Zahlen bedeuten, so kann die complexe Zahl $p + iq$ durch das Product einer bestimmten positiven realen Zahl r und einer bestimmten complexen Zahl $e^{i\varphi}$ dargestellt werden, wobei es noch freisteht, φ um 2π zu vermehren oder zu vermindern (8). Durch Vergleichung der Complexen

$$re^{i\varphi} = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = p + iq$$

ergiebt sich

$$r\cos\varphi = p, \qquad r\sin\varphi = q.$$

Sind p und q positiv, und bezeichnet man die Quotienten $\cos\varphi : \sin\varphi$ und $\sin\varphi : \cos\varphi$ wie in der Trigonometrie durch $\cot\varphi$ und $\mathrm{tang}\,\varphi$, so findet man φ und r aus den Formeln

$$\cot\varphi = \frac{p}{q}, \qquad r = \frac{p}{\cos\varphi} = \frac{q}{\sin\varphi}.$$

Ist p negativ, q positiv, so setze man $\varphi = \frac{1}{2}\pi + \varphi_1$, folglich

$$r\sin\varphi_1 = -p, \quad r\cos\varphi_1 = q, \text{ u. s. w.}$$

Sind p und q negativ, so setze man $\varphi = \pi + \varphi_2$, folglich

$$r\cos\varphi_2 = -p, \quad r\sin\varphi_2 = -q, \text{ u. s. w.}$$

Ist p positiv, q negativ, so setze man $\varphi = \frac{3}{2}\pi + \varphi_3$, folglich

$$r\sin\varphi_3 = p, \quad r\cos\varphi_3 = -q, \text{ u. s. w.}$$

Die auf die angegebene Art bestimmten Werthe von r und φ heißen nach Cauchy (vergl. §. 16, 7) der Modul und die Amplitude der complexen Zahl $p + iq$. Die conjugirte complexe Zahl $p - iq$ hat denselben Modul und die entgegengesetzt gleiche Amplitude. Reale

Zahlen haben die Amplitude 0, ihre Moduln sind von ihren (absoluten) Zahlwerthen nicht verschieden. Die Norm einer complexen Zahl ist das Quadrat ihres Moduls, $r^2 = p^2 + q^2$. Der Modul des Products oder des Quotienten von zwei Zahlen ist das Product oder der Quotient der Moduln der beiden Zahlen.

Wenn p und q die rechtwinkeligen Coordinaten des Punctes sind, welchen die Zahl $p + iq$ auf der Zahlen-Ebene einnimmt, so sind r und φ die polaren Coordinaten (Vector und Anomalie) desselben Punctes. Der Modul r giebt den Abstand des Punctes vom Nullpuncte an, die Amplitude φ bestimmt die Richtung der genannten Strecke.

10. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen complexer Zahlen werden am einfachsten mit Hülfe der angezeigten Transformation (9) von $p + iq$ in $re^{i\varphi}$ gebildet. Wenn m eine positive ganze reale Zahl bedeutet, so hat man

$$(p + iq)^m = r^m e^{im\varphi} = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$$

$$\sqrt[m]{q + iq} = r^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{m}} = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}\right)$$

$$\log(p + iq) = \log r + i(\varphi + 2k\pi) \quad \text{für die Basis } e.$$

Hierbei ist $r^{\frac{1}{m}}$ positiv real, $\log r$ eindeutig real, und k eine beliebige ganze reale Zahl. Wenn man aber k um m vermehrt oder vermindert, so bleibt die zweite Formel unverändert (8); man findet also nicht mehr als m verschiedene Werthe derselben. Demnach ist die $m$te Wurzel der Complexen $m$deutig, ihr Logarithmus unendlichdeutig.

Aus derselben Quelle schöpft man insbesondere die Wurzeln und die Logarithmen der verschiedenen Einheiten:

$$\sqrt[m]{i} = e^{i(1+4k)\frac{\pi}{2m}} = \cos(1 + 4k)\frac{\pi}{2m} + i\sin(1 + 4k)\frac{\pi}{2m}$$

$$\sqrt[m]{-1} = e^{i(1+2k)\frac{\pi}{m}} = \cos(1 + 2k)\frac{\pi}{m} + i\sin(1 + 2k)\frac{\pi}{m}$$

$$\sqrt[m]{-i} = e^{i(3+4k)\frac{\pi}{2m}} = \cos(3 + 4k)\frac{\pi}{2m} + i\sin(3 + 4k)\frac{\pi}{2m}$$

$$\sqrt[m]{1} = e^{ik\frac{2\pi}{m}} = \cos k\frac{2\pi}{m} + i\sin k\frac{2\pi}{m}$$

wo für k die Werthe $0, 1, 2, \ldots, m - 1$ zu nehmen sind. Für die Basis e findet man

$$\log i \quad = i(1 + 4k)\frac{\pi}{2} \qquad \log(-1) = i(1 + 2k)\pi$$

$$\log(-i) = i(3 + 4k)\frac{\pi}{2} \qquad \log 1 \quad = i \,.\, 2k\pi$$

wo für k jede ganze reale Zahl zu nehmen ist. Bei $k = 0$ ergiebt sich der einzige nicht imaginäre Werth von log 1, nämlich 0.

Um die Zahl x zu berechnen, deren Cosinus den Werth a hat, setzt man

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = a$$

und findet aus der Gleichung $e^{2ix} - 2ae^{ix} + 1 = 0$ zwei reciproke Werthe von e^{ix}, folglich zwei entgegengesetzt gleiche unendlichdeutige Werthe von ix.

11. I. Wenn $x = re^{i\varphi}$ und der Modul $r < 1$, so convergiren mit der unendlichen Reihe (1)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$$

zugleich die unendlichen Reihen

$$1 + r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi + r^3\cos 3\varphi + \ldots,$$

$$r\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi + r^3\sin 3\varphi + \ldots,$$

weil die Cosinus und Sinus realer Zahlen echte Brüche sind. Also convergirt auch die complexe Reihe

$$1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots$$

$$\text{d. i. } 1 + x + x^2 + \ldots$$

Ueberhaupt convergirt eine unendliche Reihe, so lange die aus den Moduln der einzelnen Glieder gebildete Reihe convergirt*). Wenn

$$x = re^{i\varphi} \qquad a_k = b_k e^{i\beta_k}$$

und die Reihe der Moduln

$$b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + \ldots$$

convergent ist, so convergiren auch die Reihen

$$b_0\cos\beta_0 + b_1 r\cos(\beta_1 + \varphi) + b_2 r^2\cos(\beta_2 + 2\varphi) + \ldots,$$

$$b_0\sin\beta_0 + b_1 r\sin(\beta_1 + \varphi) + b_2 r^2\sin(\beta_2 + 2\varphi) + \ldots,$$

also auch die aus denselben gebildete complexe Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

II. Wenn die Coefficienten a_0, a_1, a_2, .. real sind und von einem bestimmten Coefficienten an eine bis zu 0 fallende Reihe bilden, wenn x den Modul 1 und eine von 0 verschiedene Amplitude φ hat, so convergirt die unendliche Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ **).

---

*) Cauchy Anal. algébr. c. 9.

**) Vergl. Abel Crelle's J. 1 p. 332. Scheibner über unendliche Reihen 1860 p. 9. Dirichlet Liouv. Journ. 1862 p. 253.

Beweis. Bezeichnet man die endliche Reihe $a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n$ durch S_n, so ist

$(1 - x) S_n = a_0 - (a_0 - a_1)x - (a_1 - a_2)x^2 - \ldots - a_n x^{n+1}$.

Nun ist $(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + .. + (a_{k-1} - a_k) = a_0 - a_k$, also convergiren die unendlichen Reihen

$$(a_0 - a_1)\cos\varphi + (a_1 - a_2)\cos 2\varphi + (a_2 - a_3)\cos 3\varphi + \ldots,$$
$$(a_0 - a_1)\sin\varphi + (a_1 - a_2)\sin 2\varphi + (a_2 - a_3)\sin 3\varphi + \ldots,$$

folglich convergirt auch die Reihe

$$(a_0 - a_1)x + (a_1 - a_2)x^2 + (a_2 - a_3)x^3 + \ldots$$

gegen eine Grenze, die durch T bezeichnet wird. Das Glied

$$a_n x^{n+1} = a_n\{\cos(n + 1)\varphi + i\sin(n + 1)\varphi\}$$

verschwindet bei unendlichem n nach der Voraussetzung, also hat die gegebene unendliche Reihe einen endlichen Werth S von der Art, daß

$$(1 - x)S = a_0 - T, \quad S = \frac{a_0 - T}{1 - x}.$$

§. 32. Die Binomialreihe und die Logarithmenreihe.

1. Die Reihe $1 + \binom{x}{1} h + \binom{x}{2} h^2 + \ldots$ ist endlich und hat den Werth $(1 + h)^x$, wenn x eine positive ganze reale Zahl bedeutet (§. 23). Bei andern Werthen von x kann die Reihe ohne Ende fortgesetzt werden, und die unendliche Reihe convergirt, wenn der Modul von h ein echter Bruch ist*).

Beweis. Man bezeichne die Moduln von $\binom{x}{k}$ und h durch b_k und α. Nach §. 23 hat man

$$\binom{x}{k+1} : \binom{x}{k} = \frac{x - k}{k + 1}$$

folglich (§. 31, 9)

$$b_{k+1}\alpha^{k+1} : b_k\alpha^k = \alpha \bmod \frac{x - k}{k + 1}.$$

Bei hinreichend großem k ist der Modul dieses Bruches von 1 nicht merklich verschieden. Also ist $\alpha < 1$ die Bedingung, unter welcher die Reihe der Moduln $1 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots$ convergirt (§. 31, 1).

---

*) Abel Crelle's J. 1 p. 311 ff.

Unter derselben Bedingung convergirt auch die gegebene unendliche Reihe (§. 31, 11).

An der Grenze $h = 1$ ist die Convergenz der gegebenen Reihe von x abhängig. Vergl. Abel a. a. O. Heine Crelle's J. 55 p. 279.

2. Wenn die unendliche Reihe (Binomialreihe)

$$1 + \binom{x}{1} h + \binom{x}{2} h^2 + \binom{x}{3} h^3 + \ldots$$

convergirt, so wird ihr Werth durch $(1 + h)^x$ ausgedrückt*).

Beweis. Bezeichnet man den Werth der unendlichen Reihe durch $\varphi(x)$, so findet man durch Multiplication

$$\begin{aligned}\varphi(x)\,\varphi(y) = 1 &+ \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \binom{x}{3}h^3 + \ldots \\ &+ \binom{y}{1}h + \binom{x}{1}\binom{y}{1}h^2 + \binom{x}{2}\binom{y}{1}h^3 + \ldots \\ &+ \binom{y}{2}h^2 + \binom{x}{1}\binom{y}{2}h^3 + \ldots \\ &+ \binom{y}{3}h^3 + \ldots \\ &+ \ldots \\ = 1 &+ \binom{x+y}{1}h + \binom{x+y}{2}h^2 + \binom{x+y}{3}h^3 + \ldots \\ = \varphi(x &+ y)\end{aligned}$$

wegen der §. 25, 5 und Algebra §. 10, 5 bewiesenen Eigenschaft der Binomialcoefficienten. Zufolge der Identität $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x + y)$ kann $\varphi(x) = e^{ax}$ gesetzt werden, wenn a einen geeigneten Werth erhält (§. 31, 2). Um denselben zu finden, setze man $x = 1$. Dann verschwinden $\binom{x}{2}, \binom{x}{3}, \ldots$, und man behält

$$\varphi(1) = e^a = 1 + h, \qquad \varphi(x) = e^{ax} = (1 + h)^x.$$

Wenn x nicht positiv ganz real ist, so ist $(1 + h)^x$ mehrdeutig, und es wird ein bestimmter Werth der Potenz durch die Reihe ausgedrückt. Damit die Reihe alle Werthe der Potenz ausdrücke, kann ihr der Factor 1^x beigegeben werden. Vergl. §. 31, 10. Die Binomialreihe dient zur Berechnung der Wurzeln von $1 + h$, wenn der Modul von h ein echter Bruch und x ein realer Bruch ist. Vergl. §. 23, 6.

---

*) Das allgemeine Binomialtheorem, eine der ersten und größten Entdeckungen Newton's (Brief für Leibniz 1676 Jun. 13). Vergl. Euler Nov. Comm. Petrop. 19 p. 103 sowie an den §. 23 citirten Stellen, und Abel a. a. O. Die Kürzung des Beweises durch Beziehung auf die Exponentialreihe rührt von Scheibner her.

3. Für ein beliebiges endliches h ist

$$\lim \left[1 + \frac{h}{x}\right]^x = e^h, \quad x = \infty.$$

Denn bei einem hinreichend großen x hat man (2)

$$\left[1 + \frac{h}{x}\right]^x = 1 + \left[\frac{x}{1}\right]\frac{h}{x} + \left[\frac{x}{2}\right]\frac{h^2}{x^2} + \left[\frac{x}{3}\right]\frac{h^3}{x^3} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{h}{x} + \frac{h^2}{1.2}\left[1 - \frac{1}{x}\right] + \frac{h^3}{1.2.3}\left[1 - \frac{1}{x}\right]\left[1 - \frac{2}{x}\right] + \ldots$$

Wenn nun x unendlich wächst, so verschwinden $\frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \ldots$, und man behält

$$1 + \frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots = e^h$$

die Reihe, welche Newton zur Berechnung des Numerus e^h aus seinem natürlichen Logarithmus h gefunden hat (§. 31, 5)

4. Für die Basis e ist*)

$$\log(1 + h) = \lim \frac{(1 + h)^x - 1}{x}, \quad x = 0$$

$$= h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \tfrac{1}{4}h^4 + \ldots$$

Diese Reihe convergirt, wenn der Modul von h ein echter Bruch ist, und drückt alle Werthe des Logarithmus aus, wenn das Glied $\log 1$ hinzugefügt wird (§. 31, 10).

Beweis. Weil $(1 + h)^x = e^{x \log(1 + h)}$, so ist für ein beliebiges h (§. 31, 5)

$$\frac{(1 + h)^x - 1}{x} = \log(1 + h) + \frac{x\{\log(1 + h)\}^2}{1.2} + \ldots,$$

daher bei verschwindendem x

$$\lim \frac{(1 + h)^x - 1}{x} = \log(1 + h).$$

Nun ist (2) bei Werthen von h, deren Modul geringer als 1 ist,

$$\frac{(1 + h)^x - 1}{x} = h - \tfrac{1}{2}h^2\left[1 - \frac{x}{1}\right] + \tfrac{1}{3}h^3\left[1 - \frac{x}{1}\right]\left[1 - \frac{x}{2}\right] - \ldots$$

*) Die Reihe wurde zuerst von Nic. Mercator (Logarithmotechnia 1668 pr. 17) und Jac. Gregory (Exercit. geom. 1668) bekannt gemacht; sie war auch von Newton gefunden worden (Brief an Leibniz 1676 Oct. 24). Die jetzt übliche Ableitung der Reihe ist von Halley Philos. Trans. 1695 und deutlicher von Euler Introd. I §. 119 vorgetragen worden.

Also erhält man für $x = 0$

$$\lim \frac{(1+h)^x - 1}{x} = h - \tfrac{1}{2} h^2 + \tfrac{1}{3} h^3 - \ldots$$

Anmerkung. Ein künstlicher Logarithmus hat zu dem natürlichen Logarithmus desselben Numerus ein nur von der Basis abhängiges Verhältniß M (§. 19, 3). Daher ist

$$\operatorname{Log} a = M \log a,$$

$$\operatorname{Log}(a+\delta) - \operatorname{Log} a = \operatorname{Log}\left[1 + \frac{\delta}{a}\right] = M \log\left[1 + \frac{\delta}{a}\right]$$

$$= M\left[\frac{\delta}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{a^2} + \ldots\right].$$

Bei einem hinreichend kleinen $\frac{\delta}{a}$ genügt das erste Glied der eingeschlossenen Reihe. Also ist die Logarithmendifferenz dem Verhältniß der Numerndifferenz zu dem Numerus um so genauer proportional, je geringer dieses Verhältniß wird. Vergl. §. 20, 4.

5. Aus den Reihen (6)

$$\log(1+h) = h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$
$$\log(1-h) = -h - \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$

folgt durch Subtraction

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h} = h + \tfrac{1}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^5 + \ldots$$

oder nach der Substitution $\frac{1+h}{1-h} = a$, $h = \frac{a-1}{a+1}$

$$\tfrac{1}{2}\log a = \frac{a-1}{a+1} + \tfrac{1}{3}\left[\frac{a-1}{a+1}\right]^3 + \ldots$$

und insbesondere

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{m}{n} = \frac{m-n}{m+n} + \tfrac{1}{3}\left[\frac{m-n}{m+n}\right]^3 + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{u+v}{u} = \frac{v}{2u+v} + \tfrac{1}{3}\left[\frac{v}{2u+v}\right]^3 + \ldots$$

Z. B. $u = 1$, $v = 1$ giebt log 2. Durch Verdopplung findet man log 4, und $u = 4$, $v = 1$ giebt log 5 — log 4. Daher wird log 10 = log 2 + log 5, und

$$1 : \log 10 = 0{,}43429\ldots \text{ (§. 19, 3).}$$

Die für $\frac{1}{2}\log a$ gegebene Reihe convergirt, wenn der Modul von h ein echter Bruch ist, und dazu genügt es, daß der reale Theil von a

positiv ist. Denn es sei $a = p + iq$. Der Modul von h ist die positive Quadratwurzel von

$$\frac{(p-1)^2 + q^2}{(p+1)^2 + q^2}$$

und < 1, wenn $(p+1)^2 > (p-1)^2$ d. h. $p > 0$. Wenn der reale Theil von a negativ ist, so hat die complexe Zahl $-a$ einen positiven realen Theil, und die Differenz $\log a - \log(-a)$ ist $\log(-1)$. Vergl. §. 31, 10.

6. An der Grenze $h = -1$ findet man

$$\log 0 = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \ldots = -\infty.$$

In der That ist für ein positives reales n*)

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} < \frac{2}{2^n}$$

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} < \frac{4}{4^n} \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} > \frac{2}{4^n}$$

$$\frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} > \frac{4}{8^n} \text{ u. s. w.}$$

Daher liegt die Reihe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$ zwischen den Grenzen

$$1 + \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} + \ldots\right] \text{ und } 1 + \left[\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} + \ldots\right].$$

Die eingeschlossene Reihe ist eine geometrische Progression, aber nur dann fallend, wenn $n > 1$. Also ist die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ nicht endlich.

An der Grenze $h = 1$ findet man für $\log 2$ die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

welche convergirt, weil

$$(1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \ldots > \tfrac{1}{2},$$
$$1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - \ldots < 1.$$

Der Werth dieser unendlichen Reihe ist aber nicht unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder. Man bilde

*) Bemerkung Poinsot's, mitgetheilt von Stainville Mélanges p. 368.

$$t_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

$$u_k = \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}$$

$$v_k = \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}$$

Die unendlichen Reihen $t_1 + t_2 + t_3 + ..$ und $u_1 + u_2 + u_3 + ..$ sind von einander nicht verschieden, während die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + ..$ dieselben Glieder in einer andern Anordnung enthält. Nun ist $v_k - u_k = \frac{1}{2} t_k$, folglich hat die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + ..$ den Werth $\frac{3}{2} \log 2$. Ueberhaupt, wenn die Moduln der Glieder einer unendlichen Reihe eine convergente Reihe nicht bilden, und die unendliche Reihe bei einer bestimmten Anordnung der Glieder gegen eine gewisse Grenze convergirt, so wird sie bei einer andern Anordnung der Glieder im Allgemeinen gegen eine andere Grenze oder gar nicht convergiren*).

7. Aus den Relationen (§. 31, 7)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

folgt durch Division

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}$$

$$x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}.$$

Wenn $x \leqq \frac{1}{4}\pi$, so ist $x \leqq \frac{1}{2}\pi - x$, $\sin x \leqq \cos x$, $\operatorname{tang} x \leqq 1$. Bei realen Werthen von x, welche zwischen den Grenzen $\frac{1}{4}\pi$ und $-\frac{1}{4}\pi$ enthalten sind, hat man demnach (5)

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x} = i \operatorname{tang} x + \frac{1}{3} (i \operatorname{tang} x)^3 + \,..$$

folglich**)

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3} (\operatorname{tang} x)^3 + \frac{1}{5} (\operatorname{tang} x)^5 - \,...$$

An der Grenze $\operatorname{tang} x = 1$ findet man für $\frac{1}{4}\pi$ die unendliche Reihe (Leibniz a. a. O.)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \,..$$

---

*) Bemerkung Dirichlet's (Abhandl. der Berl. Acad. 1837 p. 48). Vergl. Scheibner über unendliche Reihen p. 10.

**) Jac. Gregory. Vergl. den Brief Oldenburg's an Leibniz 1675 April 12. Auch Leibniz (Brief an Oldenburg 1676 Aug. 27) und Newton (Brief an Leibniz 1676 Oct. 24) waren im Besitz dieser Reihe.

welche bei der gegebenen Anordnung der Glieder gegen $\frac{1}{4}\pi$ eben noch convergirt, weil ihr Werth zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 liegt.

Leichtere Berechnungen der Zahl π sind von Newton a. a. O. angezeigt worden. Z. B. Aus geometrischen wie aus goniometrischen Gründen hat man $\operatorname{tang}\frac{1}{6}\pi = \sqrt{\frac{1}{3}}$, folglich

$$\tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{3}}^3 + \tfrac{1}{5}\sqrt{\tfrac{1}{3}}^5 - \ldots$$

Oder man setzt $\frac{1}{4}\pi$ aus mehreren stark convergirenden unendlichen Reihen zusammen. Wenn $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$, so ist

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = 1,$$

und zu $\operatorname{tang}\alpha$ ergiebt sich $\operatorname{tang}\beta$, so daß

$$\tfrac{1}{4}\pi = \operatorname{tang}\alpha - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}\alpha)^3 + \ldots + \operatorname{tang}\beta - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}\beta)^3 + \ldots$$

Passende Werthe enthält die folgende Tabelle*)

$\frac{1}{4}\pi$	$\operatorname{tang}\alpha$	$\operatorname{tang}\beta$
$\alpha + \beta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$2\alpha + \beta$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
$4\alpha - \beta$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{239}$
$5\alpha + 2\beta$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{79}$

8. Bei complexen Werthen von $h = \alpha e^{i\omega}$, deren Modul α ein echter Bruch ist, wird die Logarithmenreihe und die Binomialreihe transformirt**), indem man

$$1 - \alpha e^{i\omega} = e^{-\varrho - i\psi}$$

setzt (§. 31, 9). Demnach hat man

$$e^{-\varrho}\cos\psi = 1 - \alpha\cos\omega, \quad e^{-\varrho}\sin\psi = \alpha\sin\omega.$$

Nach der Voraussetzung ist $1 - \alpha\cos\omega$ positiv, also $\cos\psi$ positiv, mithin ψ ein zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ liegender Werth von der Art, daß

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\alpha\sin\omega}{1 - \alpha\cos\omega}.$$

Der Modul $e^{-\varrho}$ der Zahl $1 - \alpha e^{i\omega}$ ist die positive Quadratwurzel von

$$(1 - \alpha e^{i\omega})(1 - \alpha e^{-i\omega}) = 1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2,$$
$$\varrho = \log(1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist (6)

---

*) Vergl. Klügel math. W. I p. 657. Gauß Werke II p. 501.

**) Vergl. Cauchy Anal. algébr. c. 9. Abel a. a. O. Scheibner in den Vorlesungen.

$$\varrho + i\psi = -\log(1 - \alpha e^{i\omega}) = \alpha e^{i\omega} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \ldots$$
$$\varrho - i\psi = -\log(1 - \alpha e^{-i\omega}) = \alpha e^{-i\omega} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{-2i\omega} + \ldots$$

Durch Addition und Subtraction findet man (§. 31, 7)

$$\varrho = \alpha\cos\omega + \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\omega + \ldots$$
$$\psi = \alpha\sin\omega + \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\omega + \ldots$$

Diese Reihen convergiren noch an der Grenze $\alpha = 1$, wenn ω von 0 verschieden ist (§. 31, 11).

Unter den obigen Voraussetzungen ist (2)

$$1 - \binom{x}{1}\alpha e^{i\omega} + \binom{x}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \ldots = (1 - \alpha e^{i\omega})^x$$

oder nach Vertauschung von x mit $-x$

$$1 + \frac{x}{1}\alpha e^{i\omega} + \frac{x}{1}\frac{x+1}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} - \ldots = e^{x(\varrho + i\psi)}$$

folglich bei realem x

$$1 + \frac{x}{1}\alpha\cos\omega + \frac{x}{1}\frac{x+1}{2}\alpha^2\cos 2\omega + \ldots = (1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}x}\cos x\psi,$$

$$\frac{x}{1}\alpha\sin\omega + \frac{x}{1}\frac{x+1}{2}\alpha^2\sin 2\omega + \ldots = (1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}x}\sin x\psi.$$

Drittes Buch.

Algebra.

§. 1. Die Proportionen.

(Heis §. 31—33).

1. Das Verhältniß der Größe A zu der gleichartigen Größe B, bezeichnet $A : B$ (Allg. Arithm. §. 10), ist $\gtreqless 1$, je nachdem $A \gtreqless B$. Indem man A mit den Vielfachen von B oder mit den Vielfachen eines hinreichend kleinen Theiles von B vergleicht, findet man, wenn l, m, n ganze Zahlen bedeuten, entweder $A = lB$, oder $A = \frac{m}{n}B$, oder die Begrenzung

$$\frac{m}{n}B < A < \frac{m+1}{n}B.$$

Demnach wird das Verhältniß $A : B$ entweder durch die ganze Zahl l oder durch den Bruch $\frac{m}{n}$ genau ausgedrückt, oder durch die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ begrenzt mit einem Fehler, der $\frac{1}{n}$ nicht erreicht, und der hinreichend klein ist, wenn n groß genug ist. Wenn es bei der Begrenzung bewenden muß, so ist das Verhältniß der Größen irrational (Allg. Arithm. §. 16, 4), und die Größen heißen incommensurabel, während Größen von rationalem Verhältniß commensurabel genannt werden.

Wenn man zur Bestimmung des Verhältnisses von zwei Strecken die kleinere auf die größere so oft als möglich aufträgt, den Rest so oft als möglich auf die kleinere, den zweiten Rest so oft als möglich auf den ersten Rest, u. s. f., und wenn man findet, daß kein Rest in dem vorhergehenden Reste aufgehen kann, so schließt man (Allg. Arithm. §. 13, 3), daß die Strecken incommensurabel sind (Eucl. X, 2). Beispiele: Legendre Géom. III probl. 19 (Vergl. Eucl. X, 117), Kunze Planim. 1. Aufl. 170. Bretschneider in Grunert Archiv 3 p. 440.

2. Wenn jede Begrenzung des Verhältnisses von einem Paar Größen zugleich eine Begrenzung des Verhältnisses von einem andern Paar Größen ist, so sind die Verhältnisse gleich*).

---

*) Eucl. V. def. 5.

Beweis. Zu jeder Zahl n läßt sich eine Zahl m finden, so daß

$$\frac{m}{n} < A : B < \frac{m+1}{n},$$

Ist nun immer zugleich

$$\frac{m}{n} < C : D < \frac{m+1}{n}.$$

so ist $A : B - C : D < \frac{m+1}{n} - C : D < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}$, folglich

$$A : B - C : D < \frac{1}{n}.$$

Wäre aber diese Differenz von Null verschieden, so wäre sie nicht kleiner als der beliebig kleine Bruch $\frac{1}{n}$. Also ist $A : B - C : D = 0$, $A : B = C : D$.

3. Das Verhältniß von zwei Größen wird mittelbar gefunden, indem man das Verhältniß der ersten Größe zu einer geeigneten Hülfsgröße mit dem Verhältniß der Hülfsgröße zu der zweiten Größe multiplicirt. Eucl. VI. def. 5.

$$A : B = (A : M)(M : B).$$

Denn $(A : M)(M : B)B = (A : M)M = A$ (Allg. Arithm. §. 10).

Ebenso ist $A : B = (A : M)(M : N)(N : B)$, u. s. f.

Die Verhältnisse $A : B$ und $B : A$ sind reciprok, weil $(A : B)(B : A) = A : A = 1$ (Allg. Arithm. §. 11, 7).

4. Mehrere Größen verhalten sich zu einander der Reihe nach, wie ihre Verhältnisse zu derselben Hülfsgröße (Einheit):

$$A : B : C = (A : M) : (B : M) : (C : M)$$

d. h. $A : B = (A : M) : (B : M)$,

$A : C = (A : M) : (C : M)$, u. s. w.

Denn $(A : M) : (B : M) = A : B$, weil $(A : B)(B : M) = A : M$ (3).

Wenn insbesondere die erste Größe p solche Theile (Einheiten) enthält, deren die zweite q, die dritte r enthält, so verhalten sich die Größen zu einander der Reihe nach, wie $p : q : r$. Umgekehrt, wenn Größen zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Zahlen p, q, r, so kann die erste $= pM$, die zweite $= qM$, die dritte $= rM$ gesetzt werden, wobei M unbestimmt bleibt.

Man kann die Zahlen $A : M$, $B : M$, $C : M$ sämmtlich mit der-

selben Zahl multipliciren oder dividiren, ohne ihre Verhältnisse zu einander zu verändern (Allg. Arithm. §. 11, 3). Man multiplicirt sie mit dem gemeinschaftlichen Nenner, wenn sie alle oder zum Theil Brüche sind; man dividirt sie durch ihren größten gemeinschaftlichen Divisor.

5. Proportion (ἀναλογία, proportionalitas) heißt eine Gleichung von Verhältnissen, z. B. $A : B = C : D$*). Die gleichgestellten Größen A und C, B und D werden homolog genannt. Das Product der mittlern Größen ist dem Producte der äußern gleich, wobei unter Größe deren Verhältniß zur Einheit verstanden wird. Eucl. V. def. 8. VII, 19.

Wenn $A : B = C : D$, so ist $BC = AD$.

Beweis. $AD : BC$ ist gleichbedeutend mit $(A : B)(D : C)$, weil nach der gegebenen Erklärung $A, B, ..$ Zahlen sind. Nun ist $D : C = B : A$, folglich $AD : BC = (A : B)(B : A) = 1$.

6. Die Proportion

$$A : B : C = F : G : H$$

ist gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$A : F = B : G = C : H,$$

welche Proportionen sind, wenn F, G, H Größen derselben Art, wie A, B, C bedeuten, außerdem aber nur unter der Voraussetzung einen Sinn haben, daß F, G, H Zahlen (die Verhältnisse der Größen F, G, H zur Einheit) bedeuten. Eucl. V, 16. VII, 13.

Beweis. $A : F = (A : B)(B : F)$ nach (3). Nun ist $A : B = F : G$ vorausgesetzt, folglich $A : F = (B : F)(F : G) = B : G$. U. s. w.

7. Das Verhältniß der Polynomien

$$Ax + By + Cz : Ap + Bq + Cr$$

beibt unverändert, wenn man in allen Gliedern die Größen A, B, C durch andere, F, G, H ersetzt, welche sich zu einander der Reihe nach verhalten wie A, B, C.

Beweis. Vermöge der Proportion $F : G : H = A : B : C$ ist $F : A = G : B = H : C$ (6). Multiplicirt man in den Polynomien die Größen A, B, C der Reihe nach mit $F : A$, $G : B$, $H : C$, so treten F, G, H an die Stelle von A, B, C, ohne daß das Verhältniß der Polynomien sich verändert hat, weil ihre Glieder mit derselben Zahl multiplicirt worden sind.

---

*) Das Gleichheitszeichen wird in diesem Falle auch durch das von Oughtred 1631 eingeführte Zeichen : : vertreten.

Beispiele. Wenn $A : B : C = F : G : H$, so ist

$$A \pm B : C = F \pm G : H,$$
$$A \pm B \pm C : A = F \pm G \pm H : F, \text{ u. s. w.}$$

Ist $Ax + By + Cz = 0$, so ist auch $Fx + Gy + Hz = 0$.

8. Aus zwei Proportionen kann eine neue abgeleitet werden, indem man die Größen der einen der Reihe nach mit den Größen der andern multiplicirt. Aus

$$A : B : C = F : G : H$$
$$L : M : N = P : Q : R$$

folgt die Proportion

$$AL : BM : CN = FP : GQ : HR.$$

Beweis. $AL : BM = (A : B)\,(L : M)$ wie oben (5). Nun ist $A : B = F : G$, $L : M = P : F$, folglich $AL : BM = (F : G)\,(P : Q) = FP : GQ$. U. s. w.

Umgekehrt kann aus

$$AL : BM : CN = p : q : r$$

die Proportion

$$A : B : C = \frac{p}{L} : \frac{q}{M} : \frac{r}{N}$$

abgeleitet werden.

9. Man unterscheidet hauptsächlich drei Mittel*) zwischen zwei Größen: das arithmetische, das geometrische, das harmonische.

Das arithmetische Mittel zwischen zwei Größen ist die halbe Summe derselben. Wenn x das arithmetische Mittel zwischen A und B bedeutet, so ist

$$x = \tfrac{1}{2}(A + B), \quad A - x = x - B.$$

Die Differenz von zwei Größen wird in den älteren Rechenbüchern „das arithmetische Verhältniß" derselben, und die Gleichung von zwei Differenzen „eine arithmetische Proportion" genannt. Die arithmetische Proportion $A - x = x - B$ heißt „stetig" (continua) mit Rücksicht darauf, daß die dritte Größe der zweiten gleich ist.

Das geometrische Mittel zwischen zwei Größen ist die Quadratwurzel des Products derselben. Wenn y das geometrische Mittel

---

*) Nach dem Vorgange der griechischen Mathematiker, z. B. Nicomachus Arithm. II, 21. Pappus Coll. math. III, 5.

zwischen A und B bedeutet, so ist (5)

$$y = \sqrt{AB}, \quad A : y = y : B.$$

Die Gleichung von Verhältnissen $A : y = y : B$ wird „eine geometrische Proportion" genannt, und zwar „stetig" mit Rücksicht darauf, daß die dritte Größe der zweiten gleich ist. Daher sagt man auch „geometrische mittlere Proportionale" für geometrisches Mittel.

Das harmonische Mittel zwischen zwei Größen ist die Größe, deren Reciprokes das arithmetische Mittel zwischen den Reciproken der Größen ist, wobei unter dem Reciproken der Größe das Verhältniß der Einheit zur Größe verstanden wird (5). Wenn z das harmonische Mittel zwischen A und B, x und y das arithmetische und das geometrische Mittel zwischen denselben Größen bedeuten, so ist

$$\frac{1}{z} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) = \frac{A + B}{2AB},$$

$$A - z : z - B = A : B, \quad x : y = y : z.$$

Ebenso versteht man unter dem arithmetischen Mittel zwischen n Größen den $n$ten Theil ihrer Summe, unter dem geometrischen Mittel zwischen denselben die $n$te Wurzel ihres Products, unter dem harmonischen Mittel zwischen denselben die Größe, deren Reciprokes das arithmetische Mittel zwischen den Reciproken der Größen ist. „Harmonisch" heißt überhaupt eine Reihe von Gliedern, deren Reciproke eine arithmetische Progression bilden (Allg. Arithm. §. 28, 5), zufolge ihrer Anwendung bei der Theorie der Tonleitern. „Geometrisch" wurde eine Proportion genannt wegen ihrer Anwendung in Euclid's Elementen.

10. Das geometrische Mittel zwischen zwei Größen ist kleiner als das arithmetische Mittel; die Differenz beträgt weniger als das Quadrat der Differenz der Größen dividirt durch die 8fache kleinere Größe*).

$$\tfrac{1}{2}(A + B) - \sqrt{AB} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2$$
$$= \frac{(A - B)^2}{2(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2} < \frac{(A - B)^2}{8B}.$$

Ueberhaupt wird das Product der Theile einer gegebenen Summe am größten, wenn die Theile einander gleich sind. Denn das Product der ungleichen Theile läßt sich vermehren, indem man zwei ungleiche Theile durch gleiche, nämlich jeden durch ihr arithmetisches Mittel ersetzt.

Dagegen wird die Summe der Factoren eines gegebenen Products am kleinsten, wenn die Factoren einander gleich sind. Betrüge die Summe der gleichen Factoren ebensoviel oder mehr als die Summe der ungleichen Factoren, so wäre das erstere Product größer als das letztere, gegen die Voraussetzung.

---

*) Lenthéric Gerg. Ann. 21 p. 84.

§. 2. Functionen von Variablen.

1. Eine Größe heißt abhängig von andern Größen, wenn durch Veränderung der letztern eine Veränderung der erstern bewirkt wird. Die Größen, von denen eine Größe abhängt, werden die Variablen (Argumente), die abhängige Größe eine Function*) der Variablen genannt. Z. B. der Preis einer Waare ist eine Function ihrer Masse; das Volum eines Körpers ist eine Function der Temperatur und Pressung; Potenz, Wurzel, Logarithmus einer Zahl sind Functionen der Zahl; eine Formel ist eine Function der Unbestimmten, welche in ihr vorkommen. Bei einer Function von einer Variablen gehört zu jedem Werthe der Variablen ein bestimmter Werth der Function, zu verschiedenen Werthen der Variablen gehören im Allgemeinen verschiedene Werthe der Function. Bei einer Function von mehrern Variablen gehört zu jedem Verein von Werthen der Variablen ein Werth der Function, zu jedem Werthe einer Variablen gehören im Allgemeinen unendlich viel Werthe der Function.

Irgend eine Function der Variablen x**) d. h. eine Formel, in der die Unbestimmte x vorkommt, wird dadurch bezeichnet, daß man die Variable x in Klammern schließt und vor die Parenthese zur Unterscheidung einen Buchstaben (Functionszeichen) setzt, der mit einem Factor (Coefficienten) nicht verwechselt werden darf. Z. B. $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ bedeuten verschiedene Functionen von x, die f-Function von x, die g-Function von x, u. s. f. Ebenso bezeichnet man eine Function der Variablen x und y durch $F(x, y)$, u. s. f. Unter $f(0)$, $f(1)$, . . versteht man dann die Werthe von $f(x)$ für $x = 0, 1, . .$; unter $F(0, 1)$ versteht man den Werth von $F(x, y)$ für $x = 0$, $y = 1$, u. s. f. Der Verlauf der Function einer Variablen kann dadurch verdeutlicht werden, daß man eine Reihe von realen Werthen der Variabeln mit den zugehörigen Werthen der Function tabellarisch zusammenstellt. Z. B.

---

*) Leibniz nannte Functionen allerlei zu einem Punct einer Curve gehörige Elemente, seine Abscisse, Ordinate, Tangente, Normale, u. s. f. (Acta Erud. 1692 De linea etc. Brief an Hugens 1694 Juni 29). Joh. Bernoulli brauchte 1718 den Ausdruck Function in dem jetzt gebräuchlichen Sinne (opp. II p. 241). Die Bezeichnung $f(x)$ scheint Clairaut zuerst angewandt zu haben (Mém. de l'acad. Paris. 1733 p. 269).

**) Zur Bezeichnung von Variablen und Functionen wurden von Vieta Vocale gebraucht; die heutige Bezeichnung rührt von Descartes her.

$$f(x) = \frac{3 + 4x}{7 - 2x^2}$$

x	$f(x)$
...	...
3	— 1,36
2	— 11
1	1,4
0	0,43
— 1	— 0,2
— 2	5
— 3	0,82
...	...

Um den Inhalt der Tabelle zur Anschauung zu bringen, construirt man nach einem beliebigen Maßstab die Werthe der Variablen als Abscissen d. h. als Strecken einer Geraden, die von dem Nullpunct der Geraden anfangen, und die dazu gehörigen Werthe der Function als Ordinaten d. h. als Strecken, die normal zu den Abscissen stehen und von den Endpuncten derselben anfangen. Die Linie, auf der die Endpuncte der Ordinaten liegen, ist für die gegebene Function charakteristisch.

Zu complexen Werthen der Variablen gehören im Allgemeinen complexe Werthe der Function. Zur Veranschaulichung braucht man dann zwei Flächen, die Puncte der einen für die Werthe der Variablen, entsprechende Puncte der andern für die dazu gehörigen Werthe der Function (Allg. Arithm. §. 16, 7).

2. Die Function heißt der Variablen (der *m*ten Potenz derselben) proportional, wenn die Werthe der Function zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die zugehörigen Werthe der Variablen (die *m*ten Potenzen dieser Werthe). Vergl. §. 1, 6. Wird die Variable *p*mal so groß, so wird die Function *p*mal (p^mmal) so groß. Wenn man durch a den Quotienten eines Werthes der Function durch den zugehörigen Werth der Variablen bezeichnet, so ist $f(x) = ax$ oder ax^m.

Beispiele. Die Masse eines Körpers ist seinem Gewichte proportional. Der Preis einer Waare ist dem Gewichte derselben proportional, wenn nicht die Größe des käuflichen Gegenstandes seinen Preis erhöht. Die Fläche des Kreises ist dem Quadrat des Radius proportional. Das Volum der Kugel ist dem Cubus des Radius proportional. Die Falltiefe ist dem Quadrat der Fallzeit proportional.

3. Die Function heißt der Variablen oder der *m*ten Potenz derselben umgekehrt (indirect) proportional, wenn die Werthe der Function zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Reciproken der zugehörigen Werthe der Variablen, oder wie die Reciproken der

$m$ten Potenzen dieser Werthe. Wird die Variable $p$mal so groß, so wird die Function den $p$ten Theil oder den p^mten Theil so groß. Wenn man durch a das Product eines Werthes der Function und des zugehörigen Werthes der Variablen bezeichnet, so ist $f(x) = \frac{a}{x}$ oder $\frac{a}{x^m}$.

Beispiele. Bei bestimmter Arbeit ist die Arbeitszeit umgekehrt proportional der angewandten Kraft. Die Krümmung des Kreises ist dem Radius umgekehrt proportional. Die Helligkeit einer verschwindend kleinen beleuchteten Fläche ist dem Quadrat ihres Abstandes vom Lichtpuncte umgekehrt proportional. Das Gewicht eines Körpers ist dem Quadrat seines Abstandes vom Attractionscentrum umgekehrt proportional.

Wenn die Function der Variablen oder einer Potenz derselben proportional oder umgekehrt proportional ist, so kann man aus einem Werth der Variablen und dem dazu gehörigen Werth der Function für jeden andern Werth der Variablen den dazu gehörigen Werth der Function durch Regel de tri berechnen (Gem. Arithm. §. 6).

4. Die Differenzen verschiedener Werthe der Variablen heißen Differenzen der Variablen (incrementa), und die Differenzen der zugehörigen Werthe der Function die zugehörigen Differenzen der Function. Die Function wird gleichförmig oder ungleichförmig wachsend (abnehmend) genannt, je nachdem die Differenz der Function der zugehörigen Differenz der Variablen proportional ist oder nicht. Z. B. $a + bx$ ist eine gleichförmig wachsende Function von x, weil ihre Differenz $(a + bx_1) - (a + bx) = b(x_1 - x)$ der zugehörigen Differenz der Variablen $x_1 - x$ proportional ist (2). Jede andere Function von x wächst ungleichförmig.

Während die Variable von einem Werthe zu einem andern durch beliebig kleine Differenzen d. h. stetig (continuo) übergeht, verändert sich auch die Function stetig, wenn nicht das Verhältniß, welches die Differenz der Function zu der Differenz der Variablen beim Verschwinden der letztern behält (Allg. Arithm. §. 11, 8), für einen der in Betracht kommenden Werthe der Variablen unendlich wird. Ist z. B.

$$y = \frac{a}{x},\ y_1 = \frac{a}{x_1},$$

so hat man

$$y_1 - y = -\frac{a(x_1 - x)}{xx_1},\ \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{a}{xx_1},$$

$$\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{a}{x^2},\ x_1 - x = 0.$$

Wenn $x = 0$, so wird dieser Grenzwerth unendlich, also ist bei dem Werthe 0 der Variablen die Stetigkeit der Function $\frac{a}{x}$ unterbrochen.

Eine Function von x, welche für $x = a$ den Werth F, für $x = c$ den Werth H hat, und für alle Werthe der Variablen zwischen a und c stetig bleibt, erhält einen zwischen F und H liegenden Werth G wenigstens einmal, während die Variable von a bis c sich ändert. Wenn die Function bei beliebigen Aenderungen der Variablen von Werthen unter G zu Werthen über G gelangte, ohne den Werth G erhalten zu haben, so müßte einmal zu einer verschwindenden Differenz der Variablen eine nicht verschwindende Differenz der Function gehören, mithin einmal die Stetigkeit der Function unterbrochen sein.

Die Differenz einer stetigen Function ist der zugehörigen Differenz der Variablen um so genauer proportional, je kleiner die Differenz der Variablen. Sind a, b, c Werthe der Variablen, F, G, H die zugehörigen Werthe der Function, also $b - a$, $c - a$ Differenzen der Variablen, $G - F$, $H - F$ die zugehörigen Differenzen der Function, so hat man unter Voraussetzung der Stetigkeit

$$\lim \frac{G - F}{b - a} = q = \lim \frac{H - F}{c - a},\ a = b = c,$$

mithin (2) bis auf einen in jedem Falle bestimmten Fehler

$$G - F : H - F = b - a : c - a.$$

Hierin ist die von den Nachfolgern Diophant's ausgebildete „regula falsorum“ (el-chataayn, vergl. Drobisch de Widmanni compendio p. 29, falsarum positionum bei Leonardo lib. abaci fol. 141, regula aurea bei Cardano ars magna cap. 30) und die Regel für die Interpolation der Tabellen von bestimmten Functionen (Allg. Arithm. §. 20, 4) enthalten.

5. Eine Formel, in der die Unbestimmte x vorkommt, heißt eine rationale Function dieser Variablen, wenn sie durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtractionen, Multiplicationen, Divisionen aus der Variablen und aus Constanten (d. h. von der Variablen unabhängigen Zahlen oder Formeln) gebildet ist. Z. B.

$$a + bx,\ (a + bx)^{m},\ \frac{a + bx}{c + dx^2},\ \cdot\ \cdot$$

sind rationale Functionen von x, wenn a, b, c, d von x unabhängig, übrigens aber beliebig (rational, irrational, complex) sind, während der Exponent m eine ganze reale Zahl bedeutet.

Eine rationale Function heißt gebrochen oder ganz, je nachdem

darin variable Divisoren vorkommen oder nicht. Z. B.

$$\frac{a + bx + cx^2}{d}$$

ist eine ganze Function von x, wenn a, b, c, d von x unabhängig sind. Dagegen ist $\frac{A}{B}$ eine gebrochene Function von x, wenn B eine rationale Function von x, A aber entweder eine rationale Function von x oder eine von x unabhängige Zahl bedeutet.

Die ganze Function A heißt **theilbar** durch die ganze Function B, wenn $\frac{A}{B}$ eine ganze Function ist.

6. Eine ganze Function einer Variablen heißt **vom** m**ten Grade**, wenn darin die $m$te Potenz der Variablen, aber nicht eine Potenz derselben von größerem Exponenten vorkommt. Z. B.

$$a + bx,$$
$$a + bx + c^2x,$$
$$a + bx + cx^2 + dx^3, \ldots$$

sind die allgemeinen Formeln von ganzen Functionen der Variablen x vom 1ten, 2ten, 3ten, . . Grade, wenn die Coefficienten a, b, c, d von x unabhängig sind. Weil

$$(a + x)^2 - x^2 = a^2 + 2ax,$$

so ist $(a + x)^2 - x^2$ in Wahrheit eine Function von x nur ersten Grades.

7. Eine gebrochene Function läßt sich als Quotient von ganzen Functionen darstellen, und heißt dann **echt** oder **unecht** gebrochen, je nachdem der Grad des Divisor den Grad des Dividendus übersteigt oder nicht. Eine unecht gebrochene Function läßt sich durch Division in eine ganze Function, welche sich auch auf eine Constante reduciren kann, und in eine echt gebrochene Function auflösen (Allg. Arithm. §. 12).

8. Eine Formel, welche mehrere Unbestimmte enthält, heißt eine ganze oder eine gebrochene Function dieser Variablen, wenn ihr in Bezug auf jede einzelne Variable dieselben Prädicate zukommen. Insbesondere heißt eine ganze Function mehrerer Variablen **vom** m**ten Grade**, wenn in ihren Gliedern Producte von m (aber nicht mehr als m) variablen Factoren vorkommen. Die ganzen Functionen mehrerer Variablen vom ersten, zweiten, dritten Grade werden der Reihe nach **linear**, **quadratisch**, **cubisch** genannt. Z. B. $a + bx + cy$ ist die allgemeine Formel einer linearen Function von x und y; $a + bx$

$+ cy + dx^2 + exy + fy^2$ ist die allgemeine Formel einer quadratischen Function von x und y, u. s. f.

9. Wurzeln rationaler Functionen von x und rationale Functionen solcher Wurzeln heißen irrationale Functionen von x. Wenn y eine irrationale Function von x, und z eine irrationale Function von y ist, so ist z wiederum eine irrationale Function von x, u. s. w.

Ein Werth der Variablen u, bei welchem eine gegebene ganze Function $f(u)$ verschwindet, heißt eine Wurzel der Gleichung $f(u) = 0$. Wenn nun $f(u)$, $g(u)$ $h(u)$, .. gegebene ganze Functionen von u sind, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind, und wenn p, q, r, .. Wurzeln der Gleichungen $f(u) = 0$, $g(u) = 0$, $h(u) = 0$, .. sind, so heißt jede rationale oder irrationale Function von p, q, r, .. eine algebraische Function von x (vergl. §. 4). Wenn y eine algebraische Function von x, und z eine algebraische Function von y ist, so ist z eine algebraische Function von x, u. s. w.

Algebraische Functionen können bei besondern Werthen der Constanten irrational, gebrochen, ganz werden. Functionen, welche zu den algebraischen nicht gehören, heißen transscendent*). Z. B. a^y, $\cos y$, $\sin y$, $\log y$ sind transscendente Functionen von x, wenn y eine beliebige Function von x bedeutet. Ganze Functionen unendlichen Grades sind irrational (algebraisch) oder transscendent, außer wenn sie recurrent sind (Allg. Arithm. §. 12, 4).

10. Eine ganze Function mehrerer Variablen heißt homogen**) von m Dimensionen (vom $m$ten Grade), wenn in jedem Gliede derselben m variable Factoren vorkommen, z. B.

$$ax + by, \quad ax^2 + bxy + cy^2, \ldots$$

Wenn n Variable vorhanden sind, so enthält jedes Glied der homogenen ganzen Function von m Dimensionen eine Combination von m gleichen oder ungleichen variablen Factoren. Also hat die allgemeine Formel einer homogenen ganzen Function von m Dimensionen $\binom{n+m-1}{m}$ Glieder (Allg. Arithm. §. 25, 6).

Die Glieder einer nicht homogenen ganzen Function $m$ten Grades können in ein constantes Glied und in homogene ganze Functionen von

---

*) Diese Unterscheidungen sind im 17ten Jahrh. gemacht worden. Die Benennungen rühren hauptsächlich von Leibniz her. Acta Erud. 1682, 1684 p. 234. Vergl. Euler Introd. I cap. 1. Abel Crelle J. 1 p. 67.

**) Euler Introd. I. cap. 5.

1, 2, . . , m Dimensionen zusammengefaßt werden. Bezeichnet man das erstere durch f_0, die letzteren durch $f_1, f_2, \ldots, f_m$ und eine neue Variable durch t, so erscheint die nicht homogene ganze Function $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_m$ als der Werth der homogenen ganzen Function $t^m f_0 + t^{m-1} f_1 + t^{m-2} f_2 + \ldots + t f_{m-1} + f_m$, welchen die letztere für $t = 1$ annimmt. Eine nicht homogene ganze Function $m$ten Grades von n Variablen ist ein besonderer Werth einer homogenen ganzen Function von $n + 1$ Variablen; ihre allgemeine Formel hat demnach $\binom{n+m}{m}$ Glieder.

Eine gebrochene Function mehrerer Variablen heißt homogen von $m - m'$ Dimensionen, wenn sie der Quotient homogener ganzer Functionen von m und m' Dimensionen ist.

Ueberhaupt wird irgend eine Function mehrerer Variablen homogen von m Dimensionen genannt, wenn sie dadurch mit t^m multiplicirt wird, daß man jede Variable mit t multiplicirt, wobei t eine Unbestimmte, m aber eine beliebige reale Zahl bedeutet. Z. B. $\sqrt{xy}$, $\sqrt{x-y}$, $\log x - \log y$ sind homogene Functionen der Variablen x und y von 1, $\frac{1}{2}$, 0 Dimensionen.

11. Eine Function mehrerer Variablen heißt symmetrisch oder alternirend*), je nachdem sie durch Vertauschung der Werthe von je zwei Variablen denselben oder den entgegengesetzt gleichen Werth erhält. Z. B.

$$x + y, \quad x^2 + y^2 + axy, \quad (x - y)^2, \quad \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)},$$

$$\cos(x - y), \; xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$$

sind symmetrische Functionen von x, y, z, weil sie sich nicht ändern, wenn man x mit y, oder x mit z, oder y mit z vertauscht;

$$x - y, \quad (x - y)^3, \quad \sin(x - y), \quad (x - y)(x - z)(y - z)$$

sind alternirende Functionen von x, y, z, weil sie den entgegengesetzten Werth erhalten, wenn x mit y, oder x mit z, oder y mit z vertauscht wird. Die Determinanten (Allg. Arithm. §. 26) sind alternirende Functionen ihrer Elemente. Das Quadrat einer alternirenden Function ist eine symmetrische Function.

---

*) Die Benennung „symmetrische Function", wofür man sonst functio invariabilis sagte (Lagrange, auch Gauß disq. arithm. 347), ist von Lacroix eingeführt worden (Zusätze zu Clairaut élém. d'algèbre 5. éd. 1797, I p. 298. Compl. d'algèbre 1). Die alternirenden Functionen haben ihren Namen durch Cauchy 1812 erhalten (Journ. de l'éc. polyt. Cah. 17), der die symmetrischen Functionen in permanente und alternirende theilte.

Wenn eine symmetrische Function von x, y, z das Glied $a_k x^\alpha y^\beta z^\gamma$ hat, so enthält sie die Glieder $a_k x^\alpha y^\gamma z^\beta$, $a_k x^\beta y^\alpha z^\gamma$, . . , welche durch die gegenseitige Vertauschung von x, y, z oder von α, β, γ entstehen, mit demselben Coefficienten. Wenn eine ganze symmetrische Function der n Variablen $x, y, z, \ldots$ in Bezug auf jede einzelne Variable $m$ten Grades ist, so erhält man ihre Glieder aus der Formel $a_k x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$, indem man für $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots$ je n gleiche oder ungleiche Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, m$ in allen möglichen Anordnungen setzt; die Function hat also nicht mehr verschiedene Coefficienten, als es Combinationen $\alpha\beta\gamma \ldots$ giebt, nämlich $\binom{m+1+n-1}{n} = \binom{m+n}{n}$.

§. 3. Die analytische Methode.

1. Das allgemeinste Verfahren, mathematische Aufgaben zu lösen, besteht darin, daß man zuerst die gestellten Fragen mit einer oder mehreren Unbestimmten vorläufig beantwortet, als ob die Aufgabe gelöst wäre. Diese Unbestimmten heißen die Unbekannten der Aufgabe. Dann werden die Daten der Aufgabe (die gegebenen Größen) durch die Unbekannten ausgedrückt, und die gefundenen Formeln (Functionen der Unbekannten) den Werthen, welche sie haben sollen, gleichgesetzt. Endlich berechnet man soweit es möglich ist, die Unbekannten aus den gebildeten Gleichungen.

Dieses indirecte Verfahren, welches mit unwesentlichen Veränderungen auch zur Erfindung von geometrischen Constructionen gebraucht wird, ist aus dem Alterthum unter dem Namen Analysis*), analytische Methode bekannt.

Beispiel 1. Eine Gesellschaft von 90 Personen enthält 4 Män-

---

*) Ueber die analytische Methode, als deren Erfinder im Alterthum Plato genannt wird, handeln Euclides (Elem. 13 zu Anfang und Data, deutsch von Schwab 1780), Pappus Coll. math. 7, Vieta Isagoge in artem analyticam, Newton Arithm. univ. ed. Gravesande p. 64, u. A. Vergl. Klügel math. W. I p. 86. Berechnungen nach analytischer Methode hat im Alterthum hauptsächlich Diophantus gelehrt. Im Beginn der neuern Zeit unterschied man ars minor s. ars rei et zensus — die Unbekannte hieß res, cosa und ihr Quadrat zensus, vergl. Allg. Arithm. §. 6 — und ars magna „quam vulgo cossam vocant sive regulas algebraicas“ Cardanus Ars magna cap. 1. Zur weitern Bearbeitung dieses Gebietes, welches die Namen Coß, Algebra bezeichneten, ist die Buchstabenrechnung ausgebildet worden. Seit Newton und Leibniz kam für die von ihnen ausgebildete Differential- und Integralrechnung der Name Analysis in Gebrauch. Jetzt versteht man unter Analysis die Theorie der Functionen, unter algebraischer Analysis oder Algebra die Theorie der algebraischen Functionen.

ner mehr als Frauen, 10 Kinder mehr als Erwachsene. Aus wieviel Männern, Frauen, Kindern besteht die Gesellschaft?

Die Gesellschaft enthält x Frauen, folglich $x + 4$ Männer, $2x + 4$ Erwachsene, $2x + 14$ Kinder; zusammen $4x + 18$ Personen. Sie soll 90 Personen enthalten; also setzt man

$$4x + 18 = 90.$$

Aus dieser Bedingung folgt $4x = 72$, $x = 18$, d. h. die Gesellschaft besteht aus 18 Frauen, 22 Männern, 50 Kindern.

Beispiel 2. Man gewinnt p Procent an einer Waare, die man für m Thaler verkauft. Wieviel Procent gewinnt man, wenn man die Waare für n Thaler verkauft?

Bei x Procent Gewinn werden $100+x$ Thaler für 100, 1 Thaler für den $(100+x)$ten Theil soviel, n Thaler für $n$mal soviel eingenommen, d. h. die Waare wurde für $\frac{100n}{100+x}$ Thaler eingekauft. Die Waare wird aber mit p Procent Gewinn für m Thaler verkauft, soll also für $\frac{100m}{100+p}$ Thaler eingekauft worden sein. Also setzt man

$$\frac{100n}{100+x} = \frac{100m}{100+p}.$$

Aus dieser Bedingung folgt $\frac{100+x}{n} = \frac{100+p}{m}$,

$$100 + x = (100+p)\frac{n}{m}, \quad x = (100+p)\frac{n}{m} - 100,$$

d. h. die Waare wird für n Thaler mit $(100+p)\frac{n}{m} - 100$ Procent Gewinn, oder ohne Gewinn und Verlust, oder mit $100 - (100+p)\frac{n}{m}$ Procent Verlust verkauft, je nachdem $(100+p)\frac{n}{m} - 100$ positiv oder Null oder negativ ist.

Beispiel 3. Aus dem Orte A geht ein Bote ab, der in 5 Stunden 7 Meilen zurückgelegt. Aus dem 8 Meilen rückwärts gelegenen Orte B geht 8 Stunden später dem ersten ein Bote nach, der in 3 Stunden 5 Meilen zurücklegt. Wann und wo wird der erste Bote vom zweiten eingeholt?

Der erste Bote ist bis zur Einholung x Stunden in Bewegung und legt $\frac{7}{5}x$ Meilen zurück. Der zweite Bote ist $x - 8$ Stunden in Bewegung und legt $\frac{5}{3}(x - 8)$ Meilen zurück. Die Differenz dieser

Wege ist $\frac{2}{3}(x - 8) - \frac{2}{5}x$ Meilen, und soll 8 Meilen betragen. Also setzt man

$$\tfrac{2}{3}(x - 8) - \tfrac{2}{5}x = 8.$$

Diese Bedingung lautet einfacher $\frac{4x}{15} - \frac{40}{3} = 8$, $\frac{4x}{15} = \frac{64}{3}$, $x = 80$, d. h. der erste Bote war 80 Stunden in Bewegung und 112 Meilen von A entfernt, als er von dem zweiten Boten eingeholt wurde.

Beispiel 4. Wenn a, b, c Thaler Capital nach k, l, m Monaten fällig sind, nach wie viel Monaten kann die Summe $a + b + c$ Thaler ausgezahlt werden?

Nach x Monaten. Gesetzt, 1 Thaler in 1 Monat trägt 1 Einheit Zinsen, so tragen $a + b + c$ Thaler in x Monaten $(a + b + c)x$ Einheiten Zinsen, dagegen a Thaler in k Monaten, b Thaler in l Monaten, c Thaler in m Monaten zusammen $ak + bl + cm$ Einheiten. Die ersten Zinsen sollen den letztern gleich sein, also setzt man

$$(a + b + c)x = ak + bl + cm.$$

Hieraus folgt $x = \frac{ak + bl + cm}{a + b + c}$.

Beispiel 5. Ein Wasserbehälter kann durch die Röhren A und B in 70 Minuten, durch A und C in 84 Minuten, durch B und C in 140 Minuten gefüllt werden. In wieviel Zeit kann er durch jede Röhre einzeln, in wieviel Zeit durch alle drei Röhren gefüllt werden?

Der Behälter kann durch A, B, C einzeln in x, y, z Minuten gefüllt werden, also liefern A, B, C in 1 Minute $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ Behälter, folglich

A und B in 70 Minuten $70\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ Behälter,

A und C in 84 Minuten $84\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)$ Behälter,

B und C in 140 Minuten $140\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ Behälter.

Diese Größen sollen je 1 Behälter betragen. Also setzt man

$$70\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad * = \frac{1}{70}$$

$$84\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 1 \qquad \frac{1}{x} \quad * + \frac{1}{z} = \frac{1}{84}$$

$$140\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \qquad * \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{140}$$

woraus $\frac{2}{x} = \frac{1}{70} + \frac{1}{84} - \frac{1}{140} = \frac{2}{105}$, $x = 105$ gefunden wird. Ferner ist $\frac{1}{y} = \frac{1}{70} - \frac{1}{105} = \frac{1}{210}$, $y = 210$. Endlich $\frac{1}{z} = \frac{1}{140} - \frac{1}{210} = \frac{1}{420}$, $z = 420$, d. h. die Röhren A, B, C füllen den Behälter einzeln in 105, 210, 420 Minuten.

Die drei Röhren zusammen liefern $(\frac{1}{105} + \frac{1}{210} + \frac{1}{420})$ Behälter in 1 Minute, folglich 1 Behälter in

$$\frac{1}{\frac{1}{105} + \frac{1}{210} + \frac{1}{420}} = 60 \text{ Minuten.}$$

Beispiel 6. A und B haben zusammen c Thaler, der erste m Monate, der zweite n Monate lang, in einem Geschäft angelegt. An Capital und Zinsen erhielten sie p und q Thaler zurück. Wieviel hatte jeder beigetragen?

A hatte x Thaler m Monate lang angelegt, also mx Einheiten Zinsen verdient (Beispiel 4). Sein Gewinn betrug $p - x$ Thaler, folglich 1 Einheit Zinsen $\frac{p-x}{mx}$ Thaler.

B hatte $c - x$ Thaler n Monate lang angelegt, also $n(c - x)$ Einheiten Zinsen verdient. Sein Gewinn betrug $q - (c - x)$ Thaler, folglich 1 Einheit Zinsen $\frac{q - (c - x)}{n(c - x)}$ Thaler. Die Einheit Zinsen soll aber $\frac{p-x}{mx}$ Thaler betragen, also setzt man

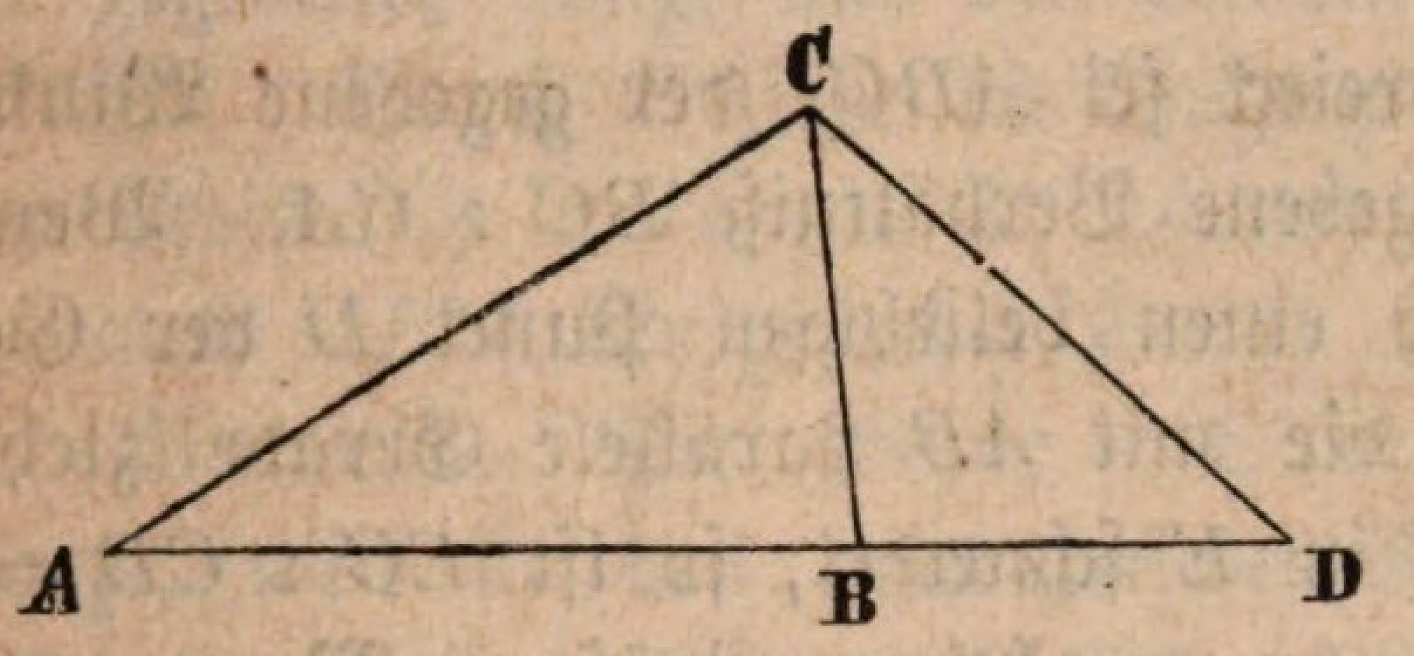
$$\frac{q - (c - x)}{n(c - x)} = \frac{p-x}{mx}.$$

Die Entwickelung dieser Bedingung besteht in der Auflösung einer quadratischen Gleichung.

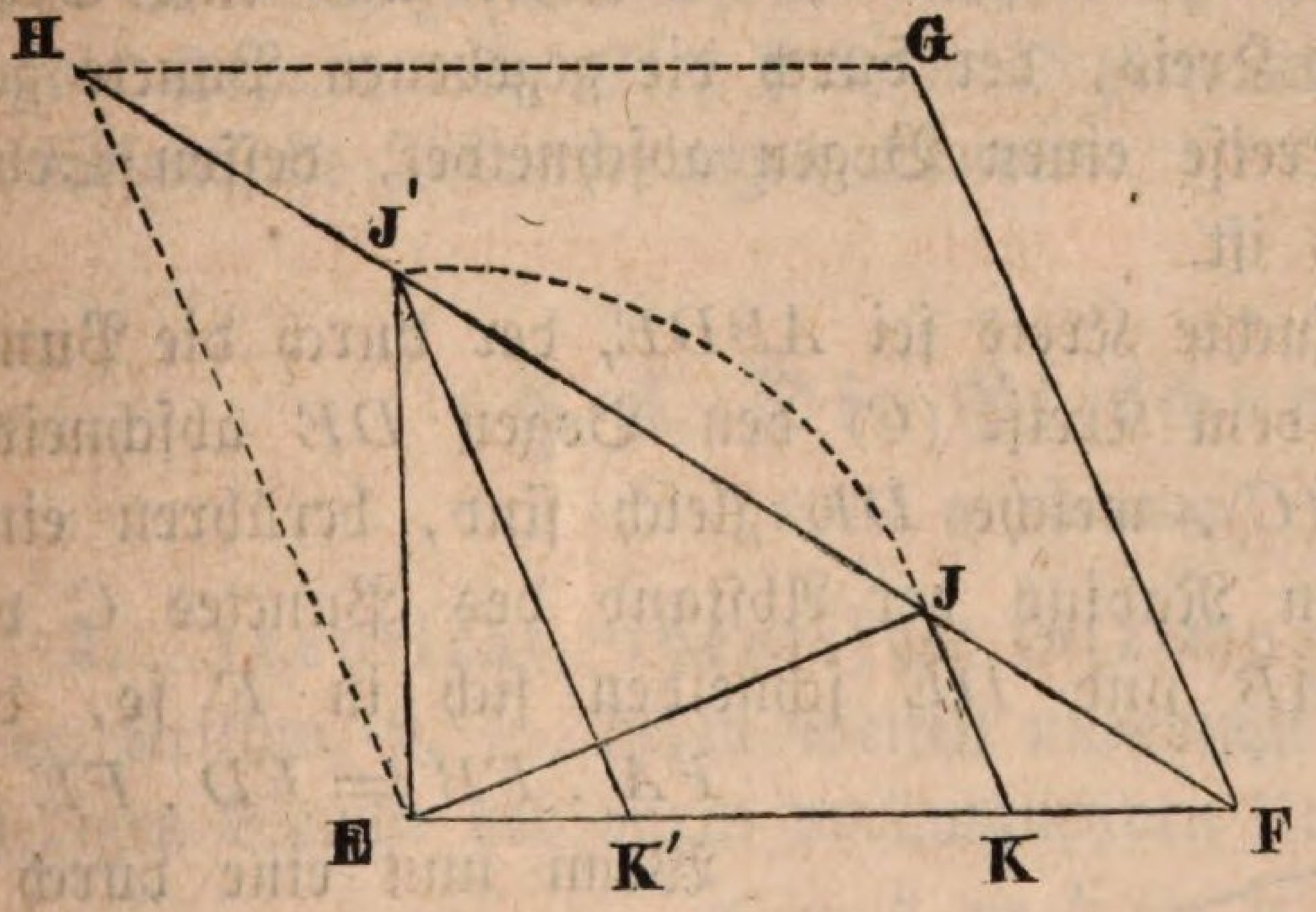
2. Constructionen nach analytischer Methode. Man construirt die gesuchte Figur willkürlich, und aus den Elementen der willkürlichen Figur diejenigen Elemente, welche von gegebener Größe oder Lage sein sollen. Hierdurch und durch geeignete Hülfslinien entstehen Hülfsfiguren, welche nach geometrischen Regeln durch die Daten bestimmt sind. Nun construirt man soweit es möglich ist aus den Daten die Hülfsfiguren und aus diesen wiederum die gesuchten Figuren. Dabei zeigt es sich, welchen Bedingungen die Daten unterworfen sein müssen, damit die Aufgabe lösbar sei, und wieviel verschiedene Figuren den Forderungen der Aufgabe genügen können (Determination).

Beispiel 1. Das Dreieck zu construiren, in welchem ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und die Summe der anliegenden Seiten von gegebener Größe sind.

Analysis. Das gesuchte Dreieck sei ABC, der gegebene Winkel B und die gegebene Seite CA. Wenn man auf der Verlängerung von AB die Strecke $BD = BC$ macht, so ist $AD = AB + BC$ die gegebene Summe, und der Winkel CDA die Hälfte des gegebenen Winkels B, weil das Dreieck DCB gleichschenkelig ist. Da nun in dem Hülfsdreieck ADC der Winkel D, die gegenüberliegende Seite CA, und die anliegende Seite AD gegeben ist, so läßt sich das Hülfsdreieck und daraus das gesuchte Dreieck construiren.



Construction. Mache EF gleich der gegebenen Summe, GFE gleich dem gegebenen Winkel, und vollende den Rhombus $EFGH$, so daß der Winkel $HFE = \frac{1}{2} GFE$ wird. Beschreibe um E mit der gegebenen Seite den Kreis, der die Diagonale FH im Allgemeinen in J und J' trifft. Ziehe JK ($J'K'$) parallel mit FG, so ist EJK ($EJ'K'$) das gesuchte Dreieck.



Beweis. Der Winkel JKE ist dem Winkel GFE, also auch dem gegebenen Winkel gleich, weil JK und FG parallel sind. Ferner ist $KJ = KF$, weil $KJF = GFJ = JFK$, folglich $EK + KJ = EF =$ der gegebenen Summe. Endlich ist $EJ =$ der gegebenen Seite. Ebenso beweist man, daß $EJ'K'$ den Forderungen der Aufgabe genügt.

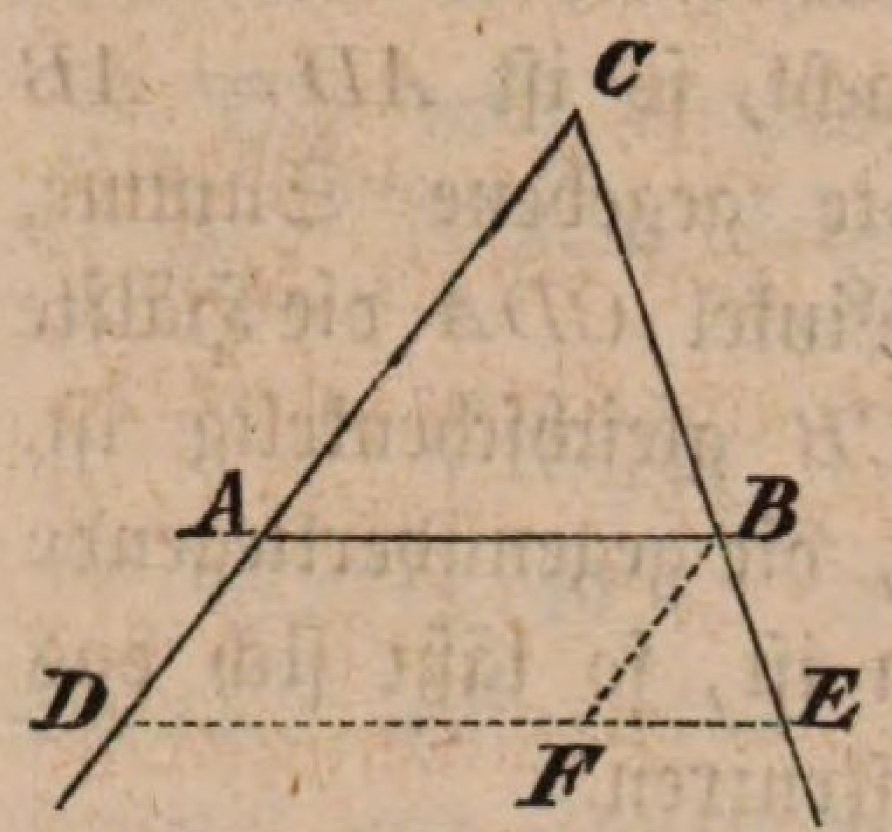
Determination. Die Aufgabe ist lösbar, wenn die Diagonale FH von dem Kreise um E getroffen wird. Dieß ist der Fall, wenn die gegebene Seite nicht kleiner ist, als die Normale aus E zu FH, d. h. nicht kleiner als die Hälfte der andern Diagonale EG.

Die beiden Auflösungen der Aufgabe sind nicht wesentlich verschieden. Denn im Rhombus $EFGH$ ist $EFJ \cong EHJ'$, also der Winkel $KEJ = JEH = EJ'K'$. Nun haben die Dreiecke EJK und $EJ'K$

eine Seite und zwei gleichliegende Winkel der Reihe nach gleich, also ist $EJK \cong J'EK'$.

Beispiel 2. Das Dreieck zu construiren, in welchem ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und das Verhältniß der anliegenden Seiten gegeben sind.

Analysis. Das gesuchte Dreieck sei ABC, der gegebene Winkel C, die gegebene Seite AB, das gegebene Verhältniß $BC : CA$. Wenn

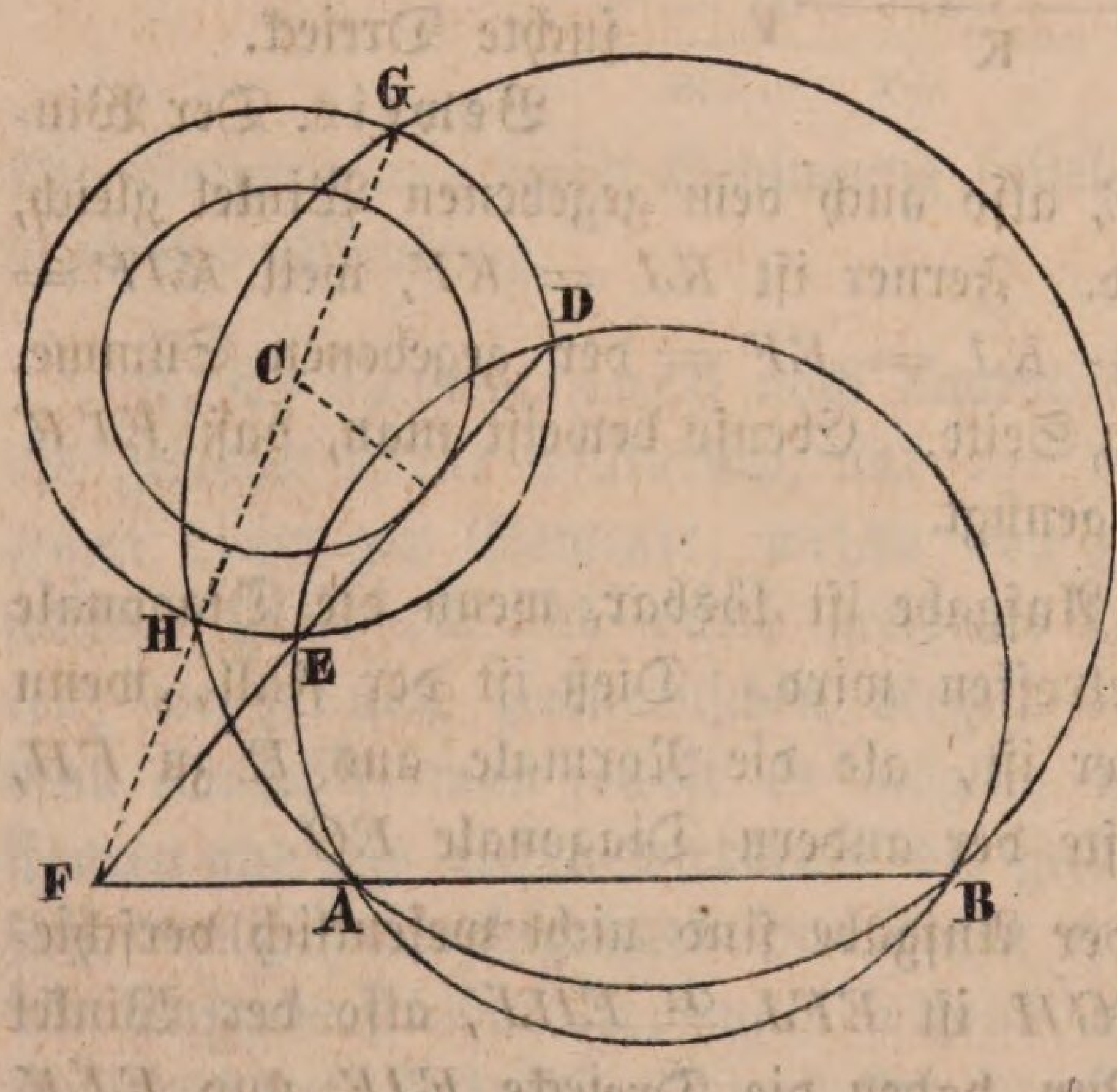


man durch einen beliebigen Punct D der Geraden CA die mit AB parallele Gerade zieht, welche BC in E schneidet, so ist $EC : CD = BC : CA$ von gegebener Größe. Wenn man noch durch B die mit CA parallele Gerade zieht, welche DE in F schneidet, so ist $DF = AB$ von gegebener Größe. Man kann also aus den Daten die Hülfsfigur $CDEF$, und aus derselben das gesuchte Dreieck construiren.

Diese Aufgabe ist bei beliebigen Daten einfach auflösbar.

Beispiel 3. Gegeben zwei Puncte, ein Kreis und eine Sehne desselben; gesucht wird ein Kreis, der durch die gegebenen Puncte geht und von dem gegebenen Kreise einen Bogen abschneidet, dessen Sehne der gegebenen Sehne gleich ist.

Analysis. Der gesuchte Kreis sei $ABDE$, der durch die Puncte A und B geht und von dem Kreise (C) den Bogen DE abschneidet. Die Sehnen des Kreises (C), welche DE gleich sind, berühren einen concentrischen Kreis, dessen Radius der Abstand des Punctes C von DE ist. Die Sehnen AB und DE schneiden sich in F so, daß



$FA \,.\, FB = FD \,.\, FE$ ist. Wenn nun eine durch F beliebig gezogene Gerade den gegebenen Kreis (C) in G und H schneidet, so ist $FD \,.\, FE = FG \,.\, FH$, folglich auch $FA \,.\, FB = FG \,.\, FH$, d. h. H liegt auf dem Kreise ABG. Also kann man durch den Hülfskreis ABG den Punct F, und durch eine bestimmte Tangente des kleinern Kreises um C den gesuchten Kreis ABD finden.

Construction. Durch die gegebenen Puncte A, B und einen willkürlichen Punct G des gegebenen Kreises (C) beschreibe den Kreis ABG, der den Kreis (C) noch einmal in H trifft. Die Geraden AB und GH schneiden sich in F. In dem Kreise (C) ziehe eine Sehne von der gegebenen Länge und den concentrischen Kreis, welcher diese Sehne berührt. Durch F ziehe die Tangenten des concentrischen Kreises, welche den Kreis (C) in D und E, D' und E' schneiden; so ist sowohl ABD, als auch ABD' der gesuchte Kreis.

Beweis. Die Sehne DE des Kreises (C) hat die geforderte Länge, weil sie den concentrischen Kreis berührt. Der Punct E liegt auf dem Kreise ABD, weil $FA \,.\, FB = FG \,.\, FH$ am Kreise $ABGH$, $FG \,.\, FH = FD \,.\, FE$ am Kreise (C), folglich $FA \,.\, FB = FD \,.\, FE$ ist. Ebenso für $D'E'$.

Determination. Diese Aufgabe hat unter der Bedingung, daß CF größer ist als der Radius des concentrischen Hülfskreises, zwei verschiedene Auflösungen, die nur dann sich nicht unterscheiden, wenn die gegebene Sehne ein Diameter ist, so daß der concentrische Kreis mit seinem Centrum zusammenfällt. Wenn insbesondere $AC = BC$, so werden die Sehnen AB, GH, DE, $D'E'$ parallel, ohne daß die Auflösungen wesentliche Veränderungen erleiden.

§. 4. Die Gleichungen.

(Heis §. 60—64).

1. Identität, identische Gleichung*) heißt eine Gleichung (Allg. Arithm. §. 1), deren Seiten unbedingt gleich sind d. h. für alle beliebigen Werthe der darin vorkommenden Unbestimmten. Es ist z. B.

$$a + b = b + a,$$
$$(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0,$$
$$(a + b)c = ac + bc,$$
$$(a - b)c + (b - c)a + (c - a)b = 0,$$

welche Werthe auch die Unbestimmten a, b, c haben mögen. Jede Gleichung von Formeln, welche in der Arithmetik als richtig nachgewiesen wird, ist eine Identität.

Wenn bei gewissen Werthen der Unbestimmten die eine Seite der Gleichung einen andern Werth erhält, als die andere Seite, so ist die

*) Identitas von idem, lateinische Uebersetzung von ταυτότης, Einerleiheit. Die in einigen Lehrbüchern vorkommende Benennung „analytische Gleichung" für Identität erscheint nach dem über die „analytische Methode" Bemerkten nicht angemessen.

Gleichung nicht identisch. Die Gleichung $a + bx + cx^2 + dx^3 + .. = 0$ ist für jeden beliebigen Werth von x nur dann richtig, also nur dann eine Identität, wenn $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, . . . Wäre a von Null verschieden, so wäre $a + bx + cx^2 + dx^3 + ..$ für $x = 0$ von Null verschieden. Damit ferner

$$bx + cx^2 + dx^3 + .. = x(b + cx + dx^2 + ..)$$

für jeden Werth von x verschwindet, muß $b + cx + dx^2 + ..$ für jeden Werth von x verschwinden, mithin $b = 0$ sein, u. s. f.

2. Gleichung im engern Sinne (aequatio) heißt eine Gleichung, welche im Allgemeinen nicht identisch ist, und deren Seiten einander gleich gesetzt worden sind, um eine darin vorkommende Unbestimmte, die Unbekannte, zu bestimmten. Z. B. die Gleichung $4x + 3 = 23$ ist nicht identisch, weil $4x + 3$ im Allgemeinen von 23 verschieden ist; durch die Gleichung hört die Unbestimmtheit von x auf, denn die Gleichung wird nur dann richtig (identisch), wenn die Unbekannte x den Werth 5 erhält.

Ein Werth der Unbekannten, welcher der Gleichung genügt, d. h. die Gleichung identisch macht (verificirt), heißt eine Wurzel der Gleichung. Auch die Wurzeln von Zahlen sind Wurzeln von Gleichungen, z. B. $\sqrt[n]{a}$ ist eine Wurzel der Gleichung $x^n = a$ für die Unbekannte x. Eine Gleichung für die Unbekannte auflösen heißt die Wurzeln der Gleichung angeben.

Wenn $ax + b = 0$ sein soll, so ist $ax = -b$, $x = -b : a$, d. h. die Gleichung $ax + b = 0$ für die Unbekannte x hat die Wurzel $-b : a$. Ein Product kann nur dann verschwinden, wenn ein Factor desselben verschwindet. Vergl. Allg. Arithm. §. 11, 8. Der Gleichung

$$(ax + b)(cx - d) = 0$$

für die Unbekannte x wird daher sowohl durch die Gleichung $ax + b = 0$ als auch durch die Gleichung $cx - d = 0$ genügt, d. h. die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind $-b : a$ und $d : c$, die Unbekannte x ist durch diese Gleichung zweideutig bestimmt.

Eine Identität ist apodictisch (demonstrativ), d. h. eine Seite derselben ist der andern gleich bei beliebigen Werthen der Unbestimmten. Eine Gleichung ist hypothetisch (problematisch), d. h. eine Seite ist der andern gleich, wenn die Unbekannte einen bestimmten Werth hat.

3. Aus einer gegebenen Gleichung, sie mag identisch sein oder nicht, kann man andere Gleichungen von derselben Bedeutung ableiten, indem man auf beiden Seiten dieselben arithmetischen Operationen ausführt.

I. Man kann ein Glied der einen Seite auf die andere Seite mit dem entgegengesetzten Zeichen setzen d. h. dieses Glied auf beiden Seiten addiren oder subtrahiren. Z. B. aus der Gleichung

$$ax + b = c - dx$$

folgt

$$ax + dx = c - b.$$

Insbesondere kann man die Gleichung auf Null reduciren d. h. alle Glieder der einen Seite auf die andere Seite versetzen. Man kann die Zeichen aller Glieder verändern. Z. B. die Gleichungen

$$a - \frac{x}{b} = \frac{x}{c} - d,$$

$$a - \frac{x}{b} - \frac{x}{c} + d = 0,$$

$$\frac{x}{b} + \frac{x}{c} - a - d = 0,$$

sind von derselben Bedeutung und können einander vertreten. Wenn eine von ihnen identisch ist, so sind auch die andern identisch. Eine Wurzel der einen ist auch eine Wurzel der andern.

II. Man kann alle Glieder einer Gleichung mit derselben Zahl multipliciren oder dividiren. Wenn gebrochne Glieder vorhanden sind, so findet man durch Multiplication mit dem kleinsten Generalnenner eine Gleichung, welche an die Stelle der gegebenen Gleichung gesetzt werden kann. Von gleicher Bedeutung sind z. B.

$$\frac{x}{b - x} + \frac{x}{c} + a = 0 \text{ und } cx + (b - x)x + ac\,(b - x) = 0.$$

Wenn man aber alle Glieder einer nicht identischen Gleichung mit einem unbekannten Factor multiplicirt, der in dem kleinsten Generalnenner der gebrochnen Glieder nicht aufgeht, so erhält man eine Gleichung, welcher die gegebene Gleichung untergeordnet ist. Multiplicirt man z. B. alle Glieder der obigen Gleichung für die Unbekannte x mit x, so hat die abgeleitete Gleichung außer den Wurzeln der gegebenen Gleichung die Wurzel 0, welche der gegebenen Gleichung fehlt.

Wenn man alle Glieder einer Gleichung durch eine beliebige Zahl dividirt, so erhält man im Allgemeinen eine Gleichung, welche mit der gegebenen Gleichung von gleicher Bedeutung ist. Gleichbedeutend sind z. B.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Die abgeleitete Gleichung ist aber der gegebenen Gleichung untergeordnet

in dem Falle, daß der Divisor unbekannt ist und in der der Null gleichgesetzen Formel aufgeht. Aus $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ folgt die untergeordnete Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, welcher die Wurzel 0 der gegebenen Gleichung fehlt.

III. Man kann jede Seite der Gleichung mit derselben Zahl potenziren, eine Zahl mit jeder Seite potenziren, dieselbe Wurzel und denselben Logarithmus jeder Seite nehmen. Gleichbedeutend sind z. B.

$$\sqrt[n]{a + bx} = c \quad \text{und} \quad a + bx = c^n,$$
$$\log.\ \text{nat.}\ (a + bx) = c \quad \text{und} \quad a + bx = e^c,$$
$$(a + bx)^m = c \quad \text{und} \quad a + bx = \sqrt[m]{c},$$
$$a^{b+cx} = d \quad \text{und} \quad b + cx = \log d : \log a.$$

Dagegen haben die Gleichungen

$$(a + bx)^m = (c + dx)^m, \quad e^{a+bx} = e^{c+dx}$$

einen weitern Umfang, als die Gleichung $a + bx = c + dx$, u. s. w.

Die unter (I) erwähnten Umgestaltungen einer Gleichung wurden nach der Ausdrucksweise der arabischen Mathematiker Algebra *) et Almocabala (restitutio et oppositio) genannt. Daher kommt der Gebrauch des Wortes Algebra im weitern Sinne für allgemeine Arithmetik (Buchstabenrechnung), im engern und gewöhnlichen Sinne für die Lehre von den nicht identischen Gleichungen, genauer von den algebraischen Gleichungen und Functionen (6).

4. Um die Art einer gegebenen Gleichung zu bestimmen, muß man die Gleichung in Bezug auf eine Unbestimmte (die Unbekannte) ordnen. Wenn in der Gleichung nur rationale Functionen der Unbestimmten vorkommen (§. 2, 5), so hat man (3)

die Gleichung auf Null zu reduciren,
die Divisoren zu entfernen, in denen die Unbestimmte vorkommt,
die Parenthesen aufzulösen, in denen die Unbestimmte vorkommt,
die Glieder zusammenzufassen, welche die Unbestimmte in 0ter, 1ter, 2ter, . . Potenz enthalten.

Die gegebene Gleichung ist identisch, wenn auch die andere Seite der geordneten Gleichung den Werth Null hat (1).

Die gegebene Gleichung ist nicht identisch und heißt eine Gleichung $m$ten Grades für die Unbekannte, wenn in der geordneten Gleichung die Unbekannte mit dem Exponenten m, aber nicht mit einem größern

---

*) Noch heute heißt bei den Spaniern der Chirurgus algebrista.

als m vorkommt, wenn also eine Seite der geordneten Gleichung Null, die andre Seite eine ganze Function der Unbekannten vom $m$ten Grade ist (§. 2, 6). Die Gleichungen 2ten, 3ten, 4ten Grades in Bezug auf eine Unbekannte heißen quadratisch, cubisch, biquadratisch. Die geordnete Gleichung heißt rein (pura, binomisch), wenn sie nicht mehr als ein unbekanntes Glied, eine Potenz der Unbekannten enthält; außerdem wird sie unrein, gemischt (affecta, trinomisch, polynomisch) genannt.

Die Gleichung $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ist für die Unbekannte x^2 vom 2ten Grade. Die Gleichung $a + b\sqrt[3]{x} + c\sqrt[3]{x^2} + dx = 0$ ist für die Unbekannte $\sqrt[3]{x}$ vom dritten Grade.

Eine reine Gleichung wird aufgelöst, indem man das unbekannte Glied auf eine Seite absondert und den Coefficienten der Unbekannten durch Division entfernt. Wenn z. B. $ax^m + b = 0$, so ist

$$ax^m = -b, \quad x^m = -\frac{b}{a}, \quad x = \sqrt[m]{-\frac{b}{a}}.$$

Die Auflösung der Gleichung $a(x - b)(x + c) = 0$ für x besteht aus der Auflösung der Gleichungen $x - b = 0$, $x + c = 0$ (2).

Die Gleichung $a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ für x erhält eine verschwindende oder eine unendliche Wurzel, je nachdem a_0 oder $a_m = 0$ wird. Denn der gegebenen Gleichung wird durch $x = 0$ unter der Bedingung $a_0 = 0$ genügt. Dagegen hat man

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots = x^m \left(a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \ldots\right)$$

Von dem eingeschlossenen Polynomium bleibt bei unendlich wachsendem x nur das von x unabhängige Glied a_m übrig, und wenn dieses verschwindet, so ist $a_m x^m = 0$.

5. Wenn in der gegebenen Gleichung unbekannte Wurzeln (irrationale, algebraische Functionen der Unbekannten §. 2, 9) vorkommen, so kann die Gleichung ebenfalls nach Potenzen der Unbekannten mit ganzen Exponenten geordnet werden. Diese Umgestaltung gelingt in den einfachsten Fällen durch Potenzirung, nachdem eine Wurzel auf eine Seite der Gleichung abgesondert worden ist. Z. B.

$$\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} = a \quad \text{oder} \quad \sqrt[4]{x^3} = a - \sqrt{x}.$$

Durch Quadriren erhält man

$$x\sqrt{x} = a^2 - 2a\sqrt{x} + x \quad \text{oder} \quad (x + 2a)\sqrt{x} = a^2 + x.$$

Durch wiederholtes Quadriren entsteht die Gleichung
$(x + 2a)^2 x = (a^2 + x)^2$ oder $x^3 + (4a - 1)x^2 + 2a^2 x - a^4 = 0$.

Im Allgemeinen ist bei einer algebraischen Formel, welche verschwinden soll, ihre Mehrdeutigkeit zu beachten, die aus der Mehrdeutigkeit der Wurzeln entspringt. Es läßt sich beweisen, daß das Product der verschiedenen Werthe, welche die algebraische Formel zufolge der Mehrdeutigkeit der darin vorkommenden Wurzeln haben kann, rational ist, die Norm der algebraischen Formel (Allg. Arithm. §. 16, 7. Vergl. unten §. 10). Z. B. die Formel $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ hat 8 Werthe, welche aber paarweise entgegengesetzt gleich sind. Das Product der 4 verschiedenen Werthe
$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})\,(-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})\,(\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r})\,(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})$
beträgt $2pq + 2pr + 2qr - p^2 - q^2 - r^2$. Wenn nun p, q, r rationale Functionen einer Unbekannten sind, so ist die Gleichung

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0$$

von derselben Bedeutung, als die Gleichung

$$2pq + 2pr + 2qr - p^2 - q^2 - r^2 = 0.$$

6. Ueberhaupt läßt sich eine nicht identische Gleichung als die Forderung betrachten, daß eine Function der Unbekannten verschwinden soll*). Eine nicht identische Gleichung heißt algebraisch oder transscendent, je nachdem die Function der Unbekannten, welche der Null gleichgesetzt wird, algebraisch oder transscendent ist (§. 2, 9). Jede algebraische Gleichung aber kann als die Forderung betrachtet werden, daß eine ganze Function der Unbekannten verschwinden soll (5).

§. 5. Systeme von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, insbesondere von linearen Gleichungen.

(Heis §. 65—68).

1. Wenn in einer nicht identischen Gleichung mehrere Unbestimmte vorkommen, so kann jede derselben als eine Unbekannte betrachtet werden, welche durch die Gleichung bestimmt ist (§. 4, 2). Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten heißt unbestimmt (indeterminata), weil sie jede Unbekannte von den übrigen Unbekannten abhängig macht, während diese letztern unbestimmt bleiben, so daß eine Unbekannte un-

---

*) Begründer dieser Ansicht ist hauptsächlich Descartes Géom. III.

endlich viele Werthe von beliebig kleinen Differenzen erhalten kann, wenn man den übrigen Unbekannten Werthe von hinreichend kleinen Differenzen beliebig ertheilt. Zufolge einer unbestimmten Gleichung ist eine Unbekannte eine **bestimmte** Function der übrigen und zwar implicite (unentwickelt oder unentwickelbar), so lange die Gleichung nicht für die Unbekannte aufgelöst ist.

Eine unbestimmte Gleichung heißt **algebraisch**, wenn sie in Bezug auf jede Unbekannte algebraisch ist; **transscendent**, wenn sie in Bezug auf eine Unbekannte transscendent ist. Jede algebraische unbestimmte Gleichung kann als die Forderung dargestellt werden, daß eine ganze Function der Unbekannten verschwinden soll (§. 4, 6); der **Grad** derselben wird nach der höchsten Anzahl von unbekannten Factoren bestimmt, die in einem Gliede der Gleichung vorkommen (§. 4, 4 und §. 2, 8). Die unbestimmten Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten, vierten Grade heißen **linear**, **quadratisch**, **cubisch**, **biquadratisch**.

2. Durch ein System (Verein) von 2, 3, . . unbestimmten Gleichungen werden im Allgemeinen ebensoviel in ihnen enthaltene Unbekannte bestimmt.

Beweis. Wenn 2 Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y gegeben sind, so ist y zufolge der ersten Gleichung eine bestimmte Function von x, zufolge der zweiten Gleichung eine andere bestimmte Function von x (1). Der Verein von beiden Gleichungen fordert, daß die erste Function von x der andern gleich ist. Durch die Gleichung (Gleichsetzung) beider Functionen von x wird die Unbestimmtheit von x aufgehoben, wenn diese Gleichung nicht identisch ist; also ist auch die Unbekannte y bestimmt.

Wenn 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten x, y, z gegeben sind, so ist z zufolge jeder Gleichung eine bestimmte Function von x und y. Der Verein der gegebenen Gleichungen fordert, daß eine dieser Functionen den anderen gleich ist. Durch 2 Gleichungen dieser 3 Functionen von x und y werden aber im Allgemeinen die zwei Unbekannten x, y bestimmt; also ist auch die Unbekannte z bestimmt.

Gesetzt, k Unbekannte werden durch ein System von k Gleichungen bestimmt, so schließt man aus denselben Gründen, daß $(k+1)$ Unbekannte durch ein System von $(k+1)$ Gleichungen bestimmt werden. Demnach werden 4 Unbekannte durch 4 Gleichungen, 5 Unbekannte durch 5 Gleichungen, u. s. f. bestimmt.

3. Wenn einem System von Gleichungen für die Unbekannten $x, y, ..$ und zwar allen seinen Gleichungen die Werthe $x = \alpha, y = \beta, ..$

genügen, so heißt das System der Werthe α, β, . . eine Auflösung (solutio) des gegebenen Systems. Dabei kann es sich ereignen, daß jede Auflösung von mehreren Gleichungen des Systems zugleich den übrigen Gleichungen des Systems genügt; in diesem Falle sind die letztern Gleichungen des Systems überflüssig und von der erstern nicht unabhängig.

Ein System von Gleichungen, die von einander unabhängig sind, ist unmöglich, wenn es weniger Unbekannte enthält als Gleichungen; bestimmt, wenn es ebensoviel Unbekannte enthält als Gleichungen (2); unbestimmt (1fach, 2fach, . .), wenn es 1, 2, . . Unbekannte mehr enthält als Gleichungen.

4. Aus zwei oder mehr Gleichungen eines gegebenen Systems kann man durch Addition oder Subtraction des Gleichen u. s. f. neue Gleichungen ableiten, welche von jenen Gleichungen nicht unabhängig sind. Eine abgeleitete Gleichung vermag eine der Gleichungen, aus denen sie abgeleitet wurde, unbedingt zu vertreten, wenn sie mit ihr denselben Grad hat.

Wenn A, B, C gegebene Functionen der Unbekannten sind und λ, μ, ν willkürliche Multiplicatoren, die aber weder verschwinden noch unendlich werden, so folgen aus dem System $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen $\lambda A + \mu B = 0$, $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$, u. s. w. Die abgeleitete Gleichung $\lambda A + \mu B = 0$ kann eine der Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ verständig vertreten, mit der sie denselben Grad hat. Das System $A = 0$, $\lambda A + \mu B = 0$ ist mit dem System $A = 0$, $B = 0$ congruent, wenn λ endlich und μ nicht 0 ist; eine Auflösung des Systems $A = 0$, $\mu = 0$ würde dem System $A = 0$, $B = 0$ im Allgemeinen nicht genügen.

Aus dem System $x + y = a$, $x - y = b$ folgt durch Addition $2x = a + b$, durch Subtraction $2y = a - b$; das System der abgeleiteten Gleichungen ist mit dem gegebenen System von gleicher Bedeutung und liefert die Auflösung desselben $x = \frac{1}{2}(a + b)$, $y = \frac{1}{2}(a - b)$.

Aus dem System $x : y = a$, $xy = b$, folgt durch Multiplication $x^2 = ab$, zum Ersatz für die zweite Gleichung. Aus dem System $x^2 - y^2 = a$, $x + y = b$ findet man durch Division die Gleichung $x - y = a : b$, welche die erste Gleichung nur zum Theil vertritt; es genügen dem System auch entgegengesetzt gleiche unendliche Werthe von x und y.

5. Unter den aus einem System von Gleichungen abzuleitenden Gleichungen kommen besonders solche in Betracht, in denen gewisse Un=

bekannte nicht mehr vorkommen. Aus zwei Gleichungen des Systems eine Unbekannte eliminiren heißt eine Gleichung ableiten, welche diese Unbekannte nicht mehr enthält.

Wenn beide Gleichungen in Bezug auf die zu eliminirende Unbekannte vom ersten Grade sind, so multiplicirt man die erste Gleichung mit dem Coefficienten der Unbekannten in der zweiten Gleichung, die zweite Gleichung mit dem negativen Coefficienten der Unbekannten in der ersten Gleichung, und findet aus den multiplicirten Gleichungen durch Addition die gesuchte Gleichung. Haben die erwähnten Coefficienten einen gemeinschaftlichen Divisor, so genügen den Multiplicatoren die Quotienten der Coefficienten durch den gemeinschaftlichen Divisor. Um aus den Gleichungen

$$6x + 5y - 7 = 0$$
$$-9x + 2y + 3 = 0$$

y zu eliminiren, multiplicirt man die erste mit 2, die zweite mit -5, und findet durch Addition $57x - 29 = 0$; um x zu eliminiren, multiplicirt man die erste mit 3, die zweite mit 2, und findet durch Addition $19y - 15 = 0$. Um x aus den Gleichungen

$$ax + B = 0$$
$$cx + D = 0$$

zu eliminiren, multiplicirt man die erste mit c, die zweite mit $-a$ und findet durch Addition $Bc - aD = 0$, die Bedingung, unter der die zweite Gleichung mit der ersten übereinstimmt.

6. Um ein System von n Gleichungen aufzulösen, ist es im Allgemeinen erforderlich, ein System von $n-1$ Gleichungen abzuleiten, welches eine der Unbekannten nicht enthält, indem man aus $n-1$ verschiedenen Paaren von Gleichungen diese Unbekannte eliminirt. Aus dem System von $n-1$ Gleichungen wird ebenso ein System von $n-2$ Gleichungen abgeleitet, welches zwei Unbekannte nicht enthält, u. s. w. Indem man von dem gegebenen System und von den abgeleiteten Systemen je eine Gleichung behält, findet man ein resolvirendes System, von welchem eine Gleichung nur die erste Unbekannte enthält, von dem eine andere Gleichung nur die zweite und die erste Unbekannte enthält, von dem eine dritte Gleichung nur die dritte und die beiden ersten Unbekannten enthält, u. s. w. Durch die Gleichungen des resolvirenden Systems werden der Reihe nach alle Unbekannte bestimmt.

Wenn man bei den gegebenen Operationen zu einer Identität gelangt, so enthält das System eine oder mehrere überflüssige Gleichungen. Wenn man aber zu einer Gleichung gelangt, in der die Coefficienten der Unbekannten Nullen sind, so genügen dem System nicht end-

liche, sondern unendliche Werthe dieser Unbekannten. Z. B. Aus dem System

$$x + y = a, \quad mx + my = b$$

findet man $0x + 0y = ma - b$. Unter der Bedingung $ma - b = 0$ ist diese Gleichung identisch, und die zweite Gleichung des Systems überflüssig. Wenn $ma - b$ nicht Null ist, so setze man $x = u : t$, $y = v : t$. Aus dem System

$$u + v = at, \quad mu + mv = bt$$

folgt $0 = (ma - b)t$, d. h. $t = 0$, $u + v = 0$. Also genügen dem gegebenen System unendliche Werthe von x und y, welche entgegengesetzt gleich sind.

Das System

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 18 \\ 2x + 3y + 5z &= 24 \\ x + 5y + 2z &= 43 \end{aligned}$$

ist bei endlichen x, y, z unmöglich, weil durch Addition der beiden ersten Gleichungen $x + 5y + 2z = 42$ gefunden wird, im Widerspruch gegen die dritte Gleichung. Diesem System genügen unendliche x, y, z, die sich verhalten wie $-19 : 1 : 7$.

Das System

$$\begin{aligned} * \quad cy - bz &= f \\ -cx \quad * \quad + az &= g \\ bx - ay \quad * &= h \end{aligned}$$

ist für endliche x, y, z nur dann möglich, wenn $af + bg + ch = 0$. Unter dieser Bedingung ist eine der Gleichungen aus den beiden andern ableitbar, mithin das System unbestimmt.

7. Um ein System linearer Gleichungen aufzulösen, wenn die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten eine gemeine Zahl ist, bildet man durch Elimination von Unbekannten abgeleitete Systeme von weniger Unbekannten, bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten gelangt. Den gefundenen Werth dieser Unbekannten substituirt man in einer Gleichung des zunächst voranstehenden Systems, um eine andere Unbekannte zu berechnen; die gefundenen Werthe werden zur Berechnung einer dritten Unbekannten gebraucht, u. s. f.

Beispiel 1.

$$\begin{array}{rcl|c|c}
5x - 3y + 2z &=& 4 & + & \\
x + 4y - z &=& 3\frac{1}{6} & 2 & + \\
2x - 3y + z &=& \frac{1}{2} & & + \\
\hline
7x + 5y &=& 10\frac{1}{3} & - & \\
3x + y &=& 3\frac{2}{3} & 5 & \\
\hline
8x &=& 8, \; x = 1 & & \\
y &=& \frac{2}{3} & & \\
z &=& \frac{1}{2}. & &
\end{array}$$

Man findet 2 abgeleitete Gleichungen für x und y, indem man z aus den beiden ersten und aus den beiden letzten Gleichungen des Systems eliminirt. Dazu genügt es, die zweite Gleichung mit 2 multiplicirt zur ersten zu addiren, und die dritte Gleichung zur zweiten zu addiren. Aus dem abgeleiteten System findet man eine neue abgeleitete Gleichung für x, indem man y aus den beiden Gleichungen dieses Systems eliminirt. Nachdem man x gefunden hat, findet man $y = 3\frac{2}{3} - 3x$, und endlich $z = \frac{1}{2} - 2x + 3y$.

Beispiel 2.

$$\begin{array}{rcl|c}
5u - 4x \quad . \quad . &=& 4 & -3 \\
3u + 4x + 5y \quad . &=& 27 & 5 \\
. \quad 2x + 3y + 4z &=& 14 & + \\
. \quad . \quad 3y - 4z &=& 7 & + \\
\hline
. \quad 32x + 25y \quad . &=& 123 & - \\
. \quad 2x + 6y \quad . &=& 21 & 16 \\
\hline
. \quad . \quad 71y \quad . &=& 213, \; y = 3 & \\
. \quad 2x \quad . \quad . &=& 3, \; x = \frac{3}{2} & \\
. \quad . \quad . \quad 4z &=& 2, \; z = \frac{1}{2} & \\
5u \quad . \quad . \quad . &=& 10, \; u = 2. &
\end{array}$$

In besondern Fällen kann man die Bearbeitung eines Systems von Gleichungen erleichtern, indem man gewisse Functionen der Unbekannten, z. B. die Reciproken der Unbekannten, die Summe der Unbekannten u. dgl. als neue Unbekannte einführt und durch Substitution derselben das gegebene System vereinfacht. Aus den gefundenen Werthen der neuen Unbekannten sind dann die Unbekannten des gegebenen Systems zu berechnen.

8. Ein allgemeines System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten enthält n^2 Coefficienten der Unbekannten und n gegebene Glieder. Wenn i, k Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ bedeuten, wenn man die Unbekannten durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$, den Coefficienten von x_k in der $i$ten Gleichung durch $a_{i,k}$ und das gegebene Glied dieser Gleichung durch b_i bezeichnet, wenn also das System

$$a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \,.\,.\, + a_{1,n}\,x_n = b_1$$
$$a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \,.\,.\, + a_{2,n}\,x_n = b_2$$
$$. \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad .$$
$$a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \,.\,.\, + a_{n,n}\,x_n = b_n$$

gegeben ist, so bilde man die Determinante der Coefficienten (Allg. Arithm. §. 26)

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . \; . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . \; . & a_{2,n} \\ . & . & . \; . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . \; . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Wenn nun R von 0 verschieden ist, so multiplicirt man die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit den Coefficienten, welche zu den Elementen der $i$ten Colonne in der Determinante gehören und die durch $\alpha_{1,i}$, $\alpha_{2,i}$, . . bezeichnet werden, und findet durch Addition sofort *)

$$Rx_i = b_1\,\alpha_{1,i} + b_2\,\alpha_{2,i} + \,.\,.\, + b_n\,\alpha_{n,i}.$$

Denn der Coefficient von x_i wird

$$a_{1,i}\,\alpha_{1,i} + a_{2,i}\,\alpha_{2,i} + \,.\,.\, + a_{n,i}\,\alpha_{n,i} = R,$$

während der Coefficient von x_k für jedes von i verschiedene k

$$a_{1,k}\,\alpha_{1,i} + a_{2,k}\,\alpha_{2,i} + \,.\,.\, + a_{n,k}\,\alpha_{n,i} = 0.$$

9. Dem homogenen linearen System, welchem ein nicht homogenes lineares System untergeordnet ist (§. 2, 10),

$$a_{11}\,x_1 + \,.\,.\, + a_{1n}\,x_n = 0$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$a_{n1}\,x_1 + \,.\,.\, + a_{nn}\,x_n = 0$$

wird im Allgemeinen nur durch die Werthe $x_1 = 0, \,.\,.\,, x_n = 0$ genügt. Denn die Determinante Rx_1

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & . \; . & a_{1n} \\ . & . & . \; . & . \\ a_{n1}\,x_1 & a_{n2} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \,.\,.\, + a_{1n}x_n & a_{12} & . \; . & a_{1n} \\ . \; . \; . \; . & . & . \; . & . \\ a_{n1}x_1 + \,.\,.\, + a_{nn}x_n & a_{n2} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

verschwindet, weil alle Elemente der ersten Colonne Nullen sind. Wenn nun R von 0 verschieden ist, so ist $x_1 = 0$, u. s. w.

Wenn aber $R = 0$, so ist das gegebene System unbestimmt. Man bilde nach Weglassung einer Gleichung die Determinante

---

*) Diese Auflösung ist von Leibniz und zum zweitenmale von Cramer (1750) erfunden worden. Vergl. die Schrift des Verf. über Determinanten §. 8.

$$\begin{vmatrix} a_{21}\, x_1 + a_{22}x_2 & a_{23} & . \; . & a_{2n} \\ . \; . \; . & . & . \; . & . \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}x_2 & a_{n3} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

welche wiederum nach der Voraussetzung verschwindet. Also ist

$$x_2 \begin{vmatrix} a_{22} & . \; . & a_{2n} \\ . & . \; . & . \\ a_{n2} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & . \; . & a_{2n} \\ . & . & . \; . & . \\ a_{n1} & a_{n3} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & . \; . & 0 \\ 0 & a_{22} & . \; . & a_{2n} \\ . & . & . \; . & . \\ 0 & a_{n2} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & . \; . & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & . \; . & a_{2n} \\ . & . & . & . \; . & . \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

d. i. $x_2\alpha_{11} - x_1\alpha_{12} = 0$, u. s. w. Daher findet man

$$x_1 : x_2 : x_3 : . \; . = \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} : . \; .$$

Diese Werthe genügen auch der weggelassenen Gleichung, weil

$$a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + . \; . + a_{1n}\alpha_{1n} = 0.$$

Wenn aber die Größen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, . \; .$ Nullen sind, so bilde man nach Weglassung von 2 Gleichungen die verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{34} & . \; . & a_{3n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . & . & . \; . & . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 & a_{n4} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und findet auf ähnliche Weise zweifach unbestimmte Werthe von $x_3, . \; ., x_n$, die auch den beiden weggelassenen Gleichungen genügen.

10. Unter der Bedingung $R = 0$ hat man die linearen Systeme

$$\begin{array}{ll} a_{11}\alpha_{i1} + . \; . + a_{1n}\alpha_{in} = 0 & a_{11}\alpha_{1k} + . \; . + a_{n1}\alpha_{nk} = 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}\alpha_{i1} + . \; . + a_{nn}\alpha_{in} = 0 & a_{n1}\alpha_{1k} + . \; . + a_{nn}\alpha_{nk} = 0 \end{array}$$

und schließt aus ihnen (9)

$$\alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \alpha_{i3} : . \; . = \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} : . \; .$$

$$\alpha_{1k} : \alpha_{2k} : \alpha_{3k} : . \; . = \alpha_{11} : \alpha_{21} : \alpha_{31} : . \; .$$

Wenn nun bei dem obigen System (8) $R = 0$ und $b_1\alpha_{1i} + . \; . + b_n\alpha_{ni}$ von Null verschieden ist, so wird dem System durch unendliche Werthe von $x_1, . \; ., x_n$ genügt, deren Verhältnisse durch das System

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + . \; . + a_{1n}x_n = 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}x_1 + . \; . + a_{nn}x_n = 0 \end{array}$$

bestimmt sind, nämlich

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \alpha_{i3} : \ldots$$

Wenn dagegen $R = 0$ und $b_1\alpha_{1i} + \ldots + b_n\alpha_{ni} = 0$, so ist das gegebene System unbestimmt, und die nach Weglassung einer Gleichung gefundenen unbestimmten Werthe von $x_2, \ldots, x_n$ genügen auch der weggelassenen Gleichung.

§. 6. Die quadratischen Gleichungen.

(Heis §§. 69–76).

1. Eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten (§. 4, 4) hat im Allgemeinen 3 Glieder, welche die Unbekannte in zweiter Potenz, in erster Potenz und gar nicht enthalten. Daher ist die allgemeine Formel einer quadratischen Gleichung mit der Unbekannten x

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

worin die Coefficienten a, b, c beliebige von x unabhängige Zahlen bedeuten.

In dem besondern Falle $c = 0$ verschwindet $ax^2 + bx$ oder $x(ax + b)$ sowohl, wenn der eine Factor x verschwindet, als auch wenn der andere Factor $ax + b$ verschwindet, d. h. wenn $x = 0$ und wenn $x = -b : a$. Also hat die Gleichung $ax^2 + bx = 0$ die beiden verschiedenen Wurzeln 0 und $-b : a$.

In dem besondern Falle $b = 0$ ist die quadratische Gleichung rein (§. 4, 4). Durch Umstellung, Division und Radicirung erhält man

$$ax^2 = -c, \quad x^2 = -\frac{c}{a}, \quad x = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Diese Quadratwurzel kann sowohl positiv als auch negativ genommen werden (Allg. Arithm. §. 16, 5). Also hat die reine quadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$ zwei entgegengesetzt gleiche, reale oder imaginäre Wurzeln.

2. Aus der gemeinen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ wird durch Umstellung und Division abgeleitet

$$ax^2 + bx = -c, \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Das Binomium $x^2 + \frac{b}{a}x$ wird zum Quadrat eines Binomium ergänzt, dessen Glieder x und $\frac{b}{2a}$ sind. Indem man auf beiden Seiten

das Quadrat des halben Coefficienten von x hinzufügt*), erhält man

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

woraus durch Radicirung

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

und durch Umstellung

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

folgt. Die Quadratwurzel ist zweideutig, und zwar real oder imaginär, je nachdem der Radicandus positiv oder negativ ist (Allg. Arithm. §. 16, 6). Also hat die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ zwei Wurzeln, welche

real verschieden sind, wenn b^2-4ac positiv,
real gleich „ „ „ „ Null,
complex conjugirt „ „ „ „ negativ,

unter der Voraussetzung, daß a, b, c reale Zahlen bedeuten.

Die Formel b^2-4ac, deren Werth hierbei entscheidend ist, heißt bei den Neuern die Discriminante (Determinante) der betrachteten quadratischen Gleichung. Wenn a und c entgegengesetzt sind, so ist $4ac$ negativ, $-4ac$ positiv, also auch b^2-4ac positiv, folglich hat die Gleichung reale verschiedene Wurzeln.

Indem man mit $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ den Zähler und den Nenner der obigen Wurzel multiplicirt, findet man

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Wenn nun $4ac:b^2$ sehr klein ist, so ist $\sqrt{b^2-4ac}$ wenig von $\pm b$ verschieden, und die eine Wurzel der Gleichung liegt nahe bei $-c:b$, die andre nahe bei $-b:a$. Wenn a verschwindet, so hat eine Wurzel den Werth $-c:b$, die andre ist unendlich groß (§. 4, 4).

Bemerkenswerth ist die Summe und das Product der Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

---

*) Dieser wesentlichste Schritt zur Auflösung der quadratischen Gleichungen ist in Euclid's Elem. II, 6 angezeigt.

Man kann also die Summe, das Product und die Zeichen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung ohne Auflösung der Gleichung angeben.

3. Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung können auch goniometrisch ausgedrückt werden. Wenn a, b, c positive Zahlen bedeuten, so hat die Gleichung

$$ax^2 + bx - c = 0 \text{ die realen Wurzeln } \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a},$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ die realen Wurzeln } \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{oder die complexen Wurzeln } \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Für alle Fälle berechne man $\sqrt{c : a} = r$, so daß $ac = a^2 r^2$.

In dem ersten Falle setze man $b = 2ar \cot \omega$. Dadurch findet man die Wurzeln

$$r(-\cot\omega \pm \sqrt{\cot^2\omega + 1}) = r\,\frac{-\cos\omega \pm 1}{\sin\omega}$$

d. i. $r \tang \frac{1}{2}\omega$ und $-r \cot \frac{1}{2}\omega$, während $\tang \omega = 2ar : b$.

In dem zweiten Falle setze man $b = \frac{2ar}{\sin\omega}$. Dadurch findet man die Wurzeln

$$r\left(-\frac{1}{\sin\omega} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2\omega} - 1}\right) = r\,\frac{-1 \pm \cos\omega}{\sin\omega}$$

d. i. $-r \tang \frac{1}{2}\omega$ und $-r \cot \frac{1}{2}\omega$, während $\sin\omega = 2ar : b$.

In dem dritten Falle setze man $b = 2ar \cos\omega$. Dadurch findet man die Wurzeln

$$r(-\cos\omega \pm i \sin\omega), \text{ während } \cos\omega = b : 2ar.$$

Die Wurzeln der Gleichung $ax^2 - bx \pm c = 0$ sind den Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx \pm c = 0$ entgegengesetzt gleich.

Einfacher kann man nach Gauß die Logarithmen der realen Wurzeln einer quadratischen Gleichung aus den Logarithmen der Coefficienten der Gleichung durch logarithmische Hülfstabellen berechnen (Vega's Sammlung math. Tafeln von Hülße 1840).

4. Es giebt 2 Werthe von x, bei welchen die quadratische Function (§. 2, 6) $ax^2 + bx + c$ verschwindet, die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Bezeichnet man diese Wurzeln durch α und β, so ist die quadratische Function $ax^2 + bx + c$ bei beliebigen Werthen der Variablen x durch $(x - \alpha)(x - \beta)$ theilbar, mithin identisch

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Denn nach der Voraussetzung ist $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, folglich

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c - (a\alpha^2 + b\alpha + c)$$
$$= a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha)$$
$$\frac{ax^2 + bx + c}{x - \alpha} = a(x + \alpha) + b.$$

Ebenso erkennt man, daß $ax^2 + bx + c$ durch $x - \beta$ theilbar ist. Bezeichnet man den Quotienten $ax^2 + bx + c : (x - \alpha)(x - \beta)$ durch q, so fordert die Identität (§. 4, 1)

$$ax^2 + bx + c = q(x - \alpha)(x - \beta) = qx^2 - (\alpha + \beta)qx + \alpha\beta q$$

daß $q = a$, $\alpha + \beta = - b : a$, $\alpha\beta = c : a$.

Wenn die quadratische Function bei mehr als 2 Werthen von x z. B. bei $x = \gamma$ verschwindet, so muß sie identisch verschwinden d. h. bei beliebigen Werthen von x, also müssen a, b, c Nullen sein. Denn $a(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$ verschwindet nur unter der Bedingung $a = 0$. Ebenso schließt man weiter, daß $bx + c$ bei mehr als einem Werth von x nur unter den Bedingungen $b = 0$, $c = 0$ verschwindet.

5. Die quadratische Function $ax^2 + bx + c$ erhält unendlich viele verschiedene Werthe, wenn die Variable x alle realen Werthe von ∞ bis $-\infty$ annimmt. Unter diesen Werthen der Function ist ein kleinster oder ein größter (Minimum, Maximum der Function), je nachdem a einen positiven oder einen negativen Werth hat. Mit Hülfe der oben gemachten Ergänzung findet man

$$ax^2 + bx + c = c + a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$
$$= c - \frac{b^2}{4a} + a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a} + a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Wenn a positiv und x real ist, so hat $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ einen positiven Werth, weil das Quadrat einer realen positiven oder negativen Zahl positiv ist. Demnach erhält die Function ihren kleinsten Werth $\frac{4ac - b^2}{4a}$, wenn $x + \frac{b}{2a} = 0$ d. h. $x = -\frac{b}{2a}$.

Durch Vertauschung von a mit $-a$ findet man

$$-ax^2 + bx + c = \frac{4ac + b^2}{4a} - a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Weil $-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$ bei realem x einen negativen Werth hat, so erreicht die Function $-ax^2 + bx + c$ ihren größten Werth $\frac{4ac + b^2}{4a}$, wenn $x - \frac{b}{2a} = 0$ d. h. $x = \frac{b}{2a}$.

Anmerkung. Aus denselben Gründen ist die gebrochene Function

$$x + \frac{a}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{a},$$

und erreicht bei positivem x ihr Minimum $2\sqrt{a}$, wenn $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}} = 0$ d. h. $x = \sqrt{a}$. Vergl. §. 1, 10.

Um die Werthe von x zu finden, bei denen die gebrochene Function

$$y = \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 3}$$

ein Maximum oder Minimum erreicht, untersuche man, bei welchen Werthen von y die Gleichung für x

$$yx^2 - (3y + 1)x - 3y + 4 = 0$$

reale Wurzeln hat. Zur Realität dieser Wurzeln genügt es, daß $(3y + 1)^2 - 4y(4 - 3y) = 21y^2 - 10y + 1 = 21(y - \frac{1}{3})(y - \frac{1}{7})$ nicht negativ ist (2, 3). Also bleibt x real, während y von ∞ bis $\frac{1}{3}$ fällt und von $-\infty$ bis $\frac{1}{7}$ steigt. An den Grenzen $y = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{7}$ hat x den Werth $\frac{3y + 1}{2y}$ d. i. 3 und 5. Folglich erreicht die gebrochene Function y bei $x = 3$ das Minimum $\frac{1}{3}$ und bei $x = 5$ das Maximum $\frac{1}{7}$.

6. Eine homogene quadratische Function (§. 2, 10) von 2, 3, . . Variablen $x, y, z, \ldots$ heißt eine quadratische Form*), und zwar binär, ternär u. s. w. Eine quadratische Form von n Variablen hat im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n+1)$ Glieder, welche die Quadrate der Variablen und die Producte von je zwei Variablen enthalten; immer aber ist sie durch nicht mehr als n variable Quadrate mit gewissen positiven oder negativen Coefficienten darstellbar.

Wenn unter den Gliedern der gegebenen Form u ein Quadrat vorkommt, so daß $u = ax^2 + 2px + v$, wobei p eine homogene lineare Function der übrigen Variablen und v eine quadratische Form der übrigen Variablen ist, so hat man

$$au = (ax + p)^2 - (p^2 - av)$$

d. h. u ist durch ein Quadrat nebst einer quadratischen Form von $n-1$

---

*) Nach Gauß Disq. arithm. 153 und 266. Dieser und der folgende Satz gehört in ein Gebiet, welches durch Euler's Classification der Flächen 2ten Grades (Introd. II App. c. 5) eröffnet worden ist. Vergl. des Verf. Determinanten §. 14.

Variablen darstellbar. Wenn unter den Gliedern der gegebenen Form u kein Quadrat vorkommt, so daß

$$u = 2bxy + 2px + 2qy + v$$

wobei p, q homogene lineare Functionen der übrigen Variablen sind und v eine quadratische Form der übrigen Variablen, so hat man

$$2bu = 4(bx+q)(by+p) - 2b(2pq - v)$$
$$= (bx+q+by+p)^2 - (bx+q-by-p)^2 - 2b(2pq-v)$$

d. h. u ist durch 2 Quadrate nebst einer quadratischen Form von $n-2$ Variablen darstellbar. Nun ist eine binäre quadratische Form durch nicht mehr als 2 Quadrate darstellbar, folglich eine ternäre durch nicht mehr als 3, u. s. w.

7. Die binäre quadratische Form

$$u = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

ist durch 1 Quadrat darstellbar, wenn ihre Determinante $b^2 - ac$ verschwindet. Denn man hat

$$au = (ax + by)^2 - (b^2 - ac)y^2.$$

Die ternäre quadratische Form

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy$$

ist durch weniger als 3 Quadrate darstellbar, wenn ihre Determinante

$$-abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh$$

verschwindet. Wenn insbesondere a, b, c, fgh Nullen sind, also z. B. $h = 0$, so ist

$$2u = 4z(gx + fy) = (gx + fy + z)^2 - (gx + fy - z)^2$$

d. h. u durch 2 Quadrate darstellbar. Wenn aber unter den Coefficienten a, b, c z. B. a nicht verschwindet, so hat man

$$au = (ax + hy + gz)^2 + py^2 + 2qyz + rz^2$$

wobei $p = ab - h^2$, $q = af - gh$, $r = ac - g^2$. In den besondern Fällen $p = 0$, $q = 0$, oder $q = 0$, $r = 0$ ist u durch 2 Quadrate darstellbar; in dem Falle $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ ist u durch 1 Quadrat darstellbar. Wenn aber unter den Größen p, r z. B. p nicht verschwindet und $q^2 - pr = 0$ ist, so bleibt

$$apu = p(ax + hy + qz)^2 + (py + qz)^2$$

d. h. u ist durch 2 Quadrate darstellbar, wenn

$$q^2 - pr = a(-abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh)$$

verschwindet. Das Binomium $pm^2 + n^2$ kann dann durch das Product der linearen Factoren $(n + m\sqrt{-p})(n - m\sqrt{-p})$ ersetzt werden.

8. Ein System von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, von dem die eine Gleichung quadratisch, die andere linear ist, hat 2 Auflösungen (§. 5, 3), die aus den Wurzeln einer quadratischen Hülfs-

gleichung berechnet werden. Im Allgemeinen hat man aus der linearen Gleichung eine Unbekannte durch die andere auszudrücken und den gefundenen Werth in der quadratischen Gleichung zu substituiren. Durch Auflösung der abgeleiteten quadratischen Gleichung findet man 2 Werthe der übrig gebliebenen Unbekannten, und durch Substitution dieser Werthe in der linearen Gleichung die zugehörigen Werthe der andern Unbekannten; mithin erhält man 2 Systeme von Werthen der Unbekannten, welche dem gegebenen System von Gleichungen genügen. In besonderen Fällen führen besondere Methoden leichter zu demselben Ziele.

Beispiel 1. $x + y = a, \; xy = b.$
Indem man die erste Gleichung quadrirt und die 4fache zweite subtrahirt, findet man statt der zweiten

$$(x - y)^2 = a^2 - 4b, \quad x - y = \sqrt{a^2 - 4b}.$$

Durch Addition und Subtraction der Gleichungen

$$x + y = a$$
$$x - y = \sqrt{a^2 - 4b}$$

findet man, wenn c die positive Quadratwurzel bedeutet,

x	$\frac{1}{2}(a + c)$	$\frac{1}{2}(a - c)$
y	$\frac{1}{2}(a - c)$	$\frac{1}{2}(a + c)$

Beispiel 2. $ax + by = f, \quad cx^2 + dy^2 = g.$

$$y = \frac{f - ax}{b}, \quad cx^2 + \frac{d}{b^2}(f - ax)^2 = g.$$

Indem man diese Gleichung ordnet und auflöst, erhält man

$$x = \frac{adf + b\sqrt{(a^2d + b^2c)g - cdf^2}}{a^2d + b^2c} \text{ und } y = \frac{f - ax}{b}.$$

Bezeichnet man die positive Quadratwurzel durch R, so findet man die Auflösungen

x	$\frac{adf + bR}{a^2d + b^2c}$	$\frac{adf - bR}{a^2d + b^2c}$
y	$\frac{bcf - aR}{a^2d + b^2c}$	$\frac{bcf + aR}{a^2d + b^2c}$

9. Wenn F und G ganze Functionen $m$ten und $n$ten Grades von x und y (§. 2, 8) und nicht beide durch dieselbe ganze Function von x und y theilbar sind, so werden die Auflösungen des Systems $F = 0$, $G = 0$ im Allgemeinen wie folgt gefunden. Man ordnet F und G nach fallenden Potenzen einer Unbekannten z. B. x, und bildet mit Hülfe geeigneter Multiplicatoren λ, μ (§. 5, 4) abgeleitete Gleichungen $\lambda F + \mu G = 0$, die für x niedern Grades sind, bis man endlich eine Gleichung $H = 0$ findet, welche x nicht enthält und die andere Unbekannte y be-

stimmt. Eine der abgeleiteten Gleichungen, die für x niedrigsten Grades ist, dient dann zur Bestimmung der Werthe von x, welche zu den einzelnen Werthen von y gehören*). Unter der Bedingung $H = 0$ haben die Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$ für x mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel; also sind die Functionen F und G von x durch eine ganze Function von x theilbar, deren Coefficienten durch die Coefficienten von F und G rational ausgedrückt werden können.

Wenn z. B. $F = ax^2 + bx + c$, $G = a'x^2 + b'x + c'$, und die Coefficienten $a, a', \ldots$ von y abhängen, so bilde man aus dem System $F = 0$, $G = 0$ das System $aG - a'F = 0$, $c'F - cG = 0$ d. i.

$(ab' - a'b)x + ac' - a'c = 0, \quad (ac' - a'c)x + bc' - b'c = 0$

in Betracht daß $x = 0$ dem gegebenen System nicht genügt. Aus dem abgeleiteten System wird wiederum die Gleichung

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$$

abgeleitet zur Berechnung der Werthe von y. Die zugehörigen Werthe von x bestimmt dann die Gleichung $(ab' - a'b)x + ac' - a'c = 0$, welche für x nur ersten Grades ist.

Das obige allgemeine System $F = 0$, $G = 0$ hat, wie unten §. 10 bewiesen wird, mn Auflösungen d. h. es genügen dem System mn Werthe von y mit ebensoviel dazugehörigen Werthen von x. Wenn die zuletzt abgeleitete Gleichung für y bei besondern Werthen der Coefficienten auf einen niedern als den mnten Grad herabsinkt, so hat sie eine entsprechende Menge unendlicher Wurzeln (§. 4, 4). Man verhütet den Verlust der letztern, wenn man statt der gegebenen Functionen $F(x, y)$ und $G(x, y)$ die homogenen Functionen (§. 2, 10)

$$t^m F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) \text{ und } t^n G\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$$

in Betracht zieht; bei $t = 0$ erhält man die unendlichen, bei $t = 1$ die endlichen Auflösungen des Systems**).

Wenn P, Q, R, S gegebene Functionen der Unbekannten sind, so wird dem System $PQ = 0$, $RS = 0$ durch die Systeme

$$\begin{array}{c|c|c|c} P = 0 & P = 0 & Q = 0 & Q = 0 \\ R = 0 & S = 0 & R = 0 & S = 0 \end{array}$$

---

*) Euler Introd. II c. 19. Mém. de Berlin 1764 p. 96 und Bézout Mém. de Paris 1764 p. 298. Vergl. des Verf. Determinanten §. 11 und dessen Abhandlung: Ueber die Auflösungen eines Systems von Gleichungen. Dresden 1868.

**) Eine allgemeine Methode zur genauern Unterscheidung der unendlichen Auflösungen eines binären Systemes ist in der erwähnten Abhandlung des Verf. enthalten.

vollständig genügt, weil ein Product nur dann verschwindet, wenn ein Factor den Werth 0 hat. Wenn $R = P$, so wird dem gegebenen System auch durch die Gleichung $P = 0$ genügt.

Wenn P und Q homogene Functionen von denselben Dimensionen sind, so bildet man aus dem System $P = a$, $Q = b$ die Gleichung $bP - aQ = 0$ zur Berechnung des Verhältnisses der Unbekannten.

In manchen Fällen wird das gegebene System vereinfacht, wenn man die Summe, die Differenz, das Product oder andere Functionen der Unbekannten als neue Unbekannte substituirt.

Beispiel 1. Das System

$$x^2(y^2 - 1) - 2xy(y^2 - 1) + y^4 - 2y^2 + 1 = 0$$
$$x^2(y^2 - 3y + 2) - y^4 - 3y^3 + 7y^2 + 15y - 18 = 0$$

ist gleichbedeutend mit dem System

$$(y - 1)(y + 1)(x - y + 1)(x - y - 1) = 0$$
$$(y - 1)(y - 2)(x + y + 3)(x - y - 3) = 0,$$

und untergeordnet dem homogenen System

$$(y - t)(y + t)(x - y + t)(x - y - t) = 0$$
$$(y - t)(y - 2t)(x + y + 3t)(x - y - 3t) = 0,$$

also auflösbar durch die Gleichung $y - t = 0$ und durch die Systeme

$y + t = 0$	$y + t = 0$	$y + t = 0$
$y - 2t = 0$	$x + y + 3t = 0$	$x - y - 3t = 0$

u. s. w. Man findet außer $y = 1$ die Auflösungen

t	x	y	
0	x	0	
	x	x	2fach
1	-2	-1	2fach
	2	-1	
	1	2	
	3	2	
	-1	-2	

In der ersten Auflösung gehört zu einem unendlich großen Werth von x ein endlicher Werth von y.

Beispiel 2. Das System

$$x^3 - y^3 - 3y(x - y) = 0$$
$$3x^2 - 2xy - y^2 = 0$$

ist gleichbedeutend mit dem System

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3y) = 0$$
$$(x - y)(3x + y) = 0,$$

welchem zuerst durch die Gleichung $x - y = 0$ genügt wird, dann

aber auch durch das System $x^2 + xy + y^2 - 3y = 0$, $3x + y = 0$. Durch die Substitution $y = -3x$ findet man $7x^2 + 9x = 0$, also für x die Werthe $0, -\frac{9}{7}$, und für y die zugehörigen Werthe $0, \frac{27}{7}$. Die Auflösung 0, 0 ist aber bereits in der Gleichung $x - y = 0$ enthalten.

Beispiel 3. Aus dem System

$$x^2 + y^2 = xy, \quad x + y = xy$$

leitet man die Gleichung $(x+y)^2 = 3xy$, oder $(x+y)^2 - 3(x+y) = 0$ ab, welche die erste Gleichung vertritt. Daher hat man die Systeme

$$\begin{array}{c|c} x + y = 0 & x + y = 3 \\ xy = 0 & xy = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c\|c|c|c} 2x & 0 & 3 + i\sqrt{3} & 3 - i\sqrt{3} \\ 2y & 0 & 3 - i\sqrt{3} & 3 + i\sqrt{3} \end{array}$$

Die Auflösung 0, 0 ist eine 2fache.

Beispiel 4. Aus dem System

$$x^3y - xy^3 + 3xy + x + y = 0, \quad x^2 - y^2 + 3 = 0$$

erhält man durch Substitution von $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ für x, y das allgemeinere homogene System

$$x^3y - xy^3 + 3t^2xy + t^3(x + y) = 0, \quad x^2 - y^2 + 3t^2 = 0.$$

Wenn man von der ersten Gleichung die mit xy multiplicirte zweite Gleichung subtrahirt, so findet man anstatt der ersten Gleichung

$$t^3(x + y) = 0$$

und daher die Systeme

$$\begin{array}{c|c} t^3 = 0 & x + y = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 & x^2 - y^2 + 3t^2 = 0. \end{array}$$

Beiden Systemen genügt nur $t = 0$, d. h. es genügen dem gegebenen System nur unendliche Werthe von x und y, die entweder gleich (3fach) oder entgegengesetzt gleich (5fach) sind.

Beispiel 5. Das System

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{3}{4}, \quad 2x^3 + 6xy^2 = \frac{9}{64}(x^2 - y^2)^3$$

ist dem homogenen System

$$8tx = 3x^2 - 3y^2, \quad 2t^3x(x^2 + 3y^2) = \tfrac{9}{64}(x^2 - y^2)^3$$

untergeordnet. Durch Substitution von $3y^2 = 3x^2 - 8tx$ in der zweiten Gleichung findet man $t^3x^2(x - 3t) = 0$, und daher die Auflösungen

t	x	y	
0	x	$\pm x$	3fach
1	0	0	4fach
	3	± 1	

Beispiel 8. Das System

$$x + y = a, \quad x^5 + y^5 = b$$

ist dem homogenen System

$$x + y = at, \quad x^5 + y^5 = bt^5$$

untergeordnet. Setzt man $xy = v$, so erhält man als zweite Gleichung (Allg. Arithm. §. 9, 5)

$$(a^5 - b)t^5 - 5a^3t^3v + 5atv^2 = 0.$$

Daher wird dem gegebenen System auch durch $t = 0$, $x + y = 0$ genügt, d. h. durch entgegengesetzt gleiche unendliche Werthe der Unbekannten. Nimmt man nun wieder $t = 1$, so ist zufolge des Systems $x + y = a$, $xy = v$

$$2x = a + \sqrt{a^2 - 4v}, \; 2y = a - \sqrt{a^2 - 4v}$$

und vermöge der quadratischen Hülfsgleichung für v

$$\frac{a^2}{2} - v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}, \; a^2 - 4v = - a^2 + 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}.$$

Bezeichnet man den positiven Werth der letztern Quadratwurzel durch c, ferner die positiven Quadratwurzeln von $- a^2 + 2c$ und $- a^2 - 2c$ durch d und d', so erhält man die Auflösungen

$2x$	$a + d$	$a - d$	$a + d'$	$a - d'$
$2y$	$a - d$	$a + d$	$a - d'$	$a + d'$

Beispiel 7. Das System

$$ax + by = 2(x^2 - y^2)$$

$$- \frac{a}{x + y} + \frac{b}{x - y} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

ist dem homogenen System

$$atx + bty - 2x^2 + 2y^2 = 0,$$

$$- at(x - y)xy + bt(x + y)xy - x^4 + y^4 = 0$$

untergeordnet. Indem man zu der zweiten Gleichung die mit $(x-y)y$ multiplicirte erste Gleichung addirt, findet man als zweite Gleichung

$$(bty - x^2 + y^2)(x^2 + 2xy - y^2) = 0,$$

oder $(bty - x^2 + y^2)(x + cy)(x + c'y) = 0$, wobei $c = 1 + \sqrt{2}$, $c^2 - 1 = 2c'$ und $c' = 1 - \sqrt{2}$ ist. Aus dem ersten System

$$atx + bty - 2x^2 + 2y^2 = 0, \quad bty - x^2 + y^2 = 0$$

folgt $t(ax - by) = 0$. Zu $t = 0$ gehört $y = \pm x$; zu $t = 1$,

$ax - by = 0$ gehört $x = 0$, $y = 0$, und

$$x = b\frac{ab}{b^2 - a^2},\ y = a\frac{ab}{b^2 - a^2}.$$

Aus dem andern System

$$ax + by - 2x^2 + 2y^2 = 0,\quad x + cy = 0$$

folgt $4cy^2 - (b - ac)y = 0$ u. s. w. Daher hat man die Auflösungen des gegebenen Systems

t	x	y	
0	x	$\pm x$	
1	0	0	3fach
	$b\frac{ab}{b^2-a^2}$	$a\frac{ab}{b^2-a^2}$	
	$\frac{ac-b}{4}$	$\frac{b-ac}{4c}$	
	$\frac{ac'-b}{4}$	$\frac{b-ac'}{4c'}$	

Beispiel 8. Wenn u und u' ternäre quadratische Formen sind (6), $u = ax^2 + \ldots$, $u' = a'x^2 + \ldots$, so giebt es 3 Multiplicatoren λ_1, λ_2, λ_3 von der Art, daß die abgeleiteten Formen $u + \lambda_1 u'$, $u + \lambda_2 u'$, $u + \lambda_3 u'$ Producte linearer Factoren $p_1 q_1$, $p_2 q_2$, $p_3 q_3$ werden. Denn die Determinante der Form $u + \lambda u'$ ist eine cubische Function von λ, die bei 3 bestimmten Werthen von λ verschwindet. Das System $u = 0$, $u' = 0$ wird durch das System $p_1 q_1 = 0$, $p_2 q_2 = 0$ vertreten, dessen Auflösungen zugleich der Gleichung $p_3 q_3 = 0$ genügen.

§. 7. Die cubischen und biquadratischen Gleichungen.

(Heis §§. 95—98. 69. 105).

1. Wenn man die Glieder der Gleichung $m$ten Grades

$$0 = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots$$

der Reihe nach mit der geometrischen Progression $\frac{1}{v}$, 1, v, . . multiplicirt, so erhält man eine Gleichung desselben Grades, deren Wurzeln zu den Wurzeln der gegebenen Gleichung das Verhältniß v haben. Denn die Substitution $x = y : v$ giebt nach Multiplication mit v^{m-1}

$$0 = \frac{a}{v}y^m + by^{m-1} + cvy^{m-2} + \ldots$$

Um in der transformirten Gleichung den Coefficienten 1 der höchsten Potenz der Unbekannten zu erhalten, setze man $v = a$. Um den zweiten Coefficienten dem ersten gleich zu erhalten, setze man $v = a : b$, u. s. w.

2. Wenn man in der gegebenen Gleichung $x = y - \frac{b}{ma}$ setzt, so kommt in der transformirten Gleichung die $(m - 1)$te Potenz der Unbekannten y nicht vor. Denn man erhält nach Entwickelung der Potenzen des Binomium

$$\begin{aligned} 0 = ay^{m} - by^{m-1} &+ \frac{m-1}{2m}\frac{b^2}{a}y^{m-2} - \dots \\ + by^{m-1} &- \frac{m-1}{m}\frac{b^2}{a}y^{m-2} + \dots \\ &+ cy^{m-2} \qquad - \dots \\ &\qquad\qquad + \dots \end{aligned}$$

Die numerische Darstellung der transformirten Gleichung wird am einfachsten zu Stande gebracht, indem man zuerst den Werth von $ax + b$ mit dem Werth von x multiplicirt und c addirt, indem man ferner den Werth von $ax^2 + bx + c$ mit x multiplicirt und d addirt, u. s. w.

3. Die Auflösung einer cubischen Gleichung kann auf die Auflösung der besondern cubischen Gleichung

$$x^3 + 3ax + 2b = 0$$

zurückgeführt werden (1, 2). Durch die Substitution $x = t + u$ erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} &t^3 + 3t^2u + 3tu^2 + u^3 + 3a(t + u) + 2b \\ &= t^3 + u^3 + 3(tu + a)(t + u) + 2b = 0, \end{aligned}$$

welcher durch die Gleichungen für t und u

$$t^3 + u^3 + 2b = 0, \quad tu + a = 0$$

genügt werden kann. Aus dem System $t^3 + u^3 = -2b$, $t^3u^3 = -a^3$ findet man (§. 6, 8)

$$\begin{aligned} t^3 &= -b + \sqrt{a^3 + b^2} \\ u^3 &= -b - \sqrt{a^3 + b^2}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß $a^3 + b^2$ positiv ist, bezeichne man die realen Cubikwurzeln von $-b + \sqrt{a^3+b^2}$ und $-b - \sqrt{a^3+b^2}$ durch p und q, die eigentlichen Cubikwurzeln von 1 (Allg. Arithm. §. 18, 9) durch

$$\alpha = -\tfrac{1}{2} + i.\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \alpha^2 = -\tfrac{1}{2} - i.\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Dann erhält man für t und u die Werthe

t	p	αp	$\alpha^2 p$	p	...
u	q	q	q	αq	

Durch die Bedingung $tu + a = 0$ sind aber die Systeme

t	αp	$\alpha^2 p$	p	αp	p	$\alpha^2 p$
u	q	q	αq	αq	$\alpha^2 q$	$\alpha^2 q$

ausgeschlossen, weil das Product dieser zusammengehörigen Werthe nicht den realen Werth $-a$ haben würde. Folglich bleiben für $t+u$ drei Werthe

$$\begin{aligned} &p + q \\ &\alpha p + \alpha^2 q = -\tfrac{1}{2}(p+q) + i.\tfrac{1}{2}(p-q)\sqrt{3} \\ &\alpha^2 p + \alpha q = -\tfrac{1}{2}(p+q) - i.\tfrac{1}{2}(p-q)\sqrt{3} \end{aligned}$$

als Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung*).

4. Wenn $a^3 + b^2$ positiv ist, so hat die cubische Gleichung eine reale und zwei conjugirt complexe Wurzeln. Ueber die Rationalität derselben kann nur durch directe Versuche entschieden werden.

Wenn $a^3 + b^2$ Null ist, so hat die Gleichung drei reale Wurzeln, von denen 2 einander gleich sind, $2p$, $-p$, $-p$, weil $q = p$.

Wenn $a^3 + b^2$ negativ ist, so hat die Gleichung 3 verschiedene reale Wurzeln, welche in den obigen Formeln als Summen der Cubikwurzeln von conjugirt complexen Zahlen erscheinen. Daß in diesem Falle (casus irreducibilis) die cubische Gleichung reale Wurzeln hat, erkennt man aus den Werthen, welche die der Null gleichgesetzte cubische Function von x bei realen Werthen von x annimmt**). Weil der Coefficient von x negativ sein muß, so betrachte man die cubische Function

$$f(x) = x^3 - 3ax + 2b$$

unter der Voraussetzung, daß a, b positiv sind und $b^2 < a^3$. Durch die Substitution $x = y\sqrt{a}$ geht $f(x)$ in $g(y).a\sqrt{a}$ über, so daß

$$g(y) = y^3 - 3y + 2c,\quad c = \frac{b}{a\sqrt{a}} < 1.$$

Nun ist $g(2)$ positiv, $g(1)$ negativ, $g(0)$ positiv, $g(-1)$ positiv, $g(-2)$ negativ, und überhaupt $g(y)$ bei endlichen realen Werthen von y endlich real. Also muß $g(y)$ Null werden, während y von 2 auf 1,

---

*) Die Formel für die reale Wurzel der cubischen Gleichung ist von Scipione dal Ferro 1505, bald darauf auch von Tartaglia erfunden, und von Cardano 1545 (Ars magna c. XI.) nebst dem Beweis mitgetheilt worden, weshalb sie den Namen „Cardanische Formel" führt. Vergl. Klügel math. W. I p. 34.

**) Stainville Corresp. s. l'Éc. polyt. 3 p. 58 und Mélanges d'anal. p. 197.

von 1 auf 0, von — 1 auf — 2 fällt, d. h. die Gleichung $g(y) = 0$ hat 3 reale Wurzeln. Folglich hat die Gleichung $f(x) = 0$ ebenfalls 3 reale Wurzeln.

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3ax - 2b = 0$ sind den Wurzeln der Gleichung $-x^3 + 3ax - 2b = 0$ entgegengesetzt gleich. Die Wurzeln dieser Gleichung sind aber von den Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3ax + 2b = 0$ nicht verschieden. Also hat die Gleichung $x^3 - 3ax - 2b = 0$ ebenfalls 3 reale Wurzeln.

Daß eine cubische Gleichung nicht mehr als 3 Wurzeln haben kann, wird wie §. 6, 4 bewiesen.

5. Die realen Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3ax - 2b = 0$, wenn $b^2 < a^3$, werden goniometrisch berechnet*). Man hat

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos 2\varphi \cos\varphi - \sin 2\varphi \sin\varphi \\ &= (2\cos\varphi^2 - 1)\cos\varphi - 2(1 - \cos\varphi^2)\cos\varphi \\ &= 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi, \end{aligned}$$

daher bei beliebigen Werthen von φ

$$\cos\varphi^3 - \tfrac{3}{4}\cos\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi = 0,$$

und unter den Voraussetzungen $x = r\cos\varphi,\quad \omega = 3\varphi$,

$$x^3 - \tfrac{3}{4}r^2 x - \tfrac{1}{4}r^3\cos\omega = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit der aufzulösenden Gleichung überein, wenn

$$\tfrac{3}{4}r^2 = a,\quad \tfrac{1}{4}r^3\cos\omega = 2b,$$

$$r = 2\sqrt{a},\quad \cos\omega = \frac{b}{a\sqrt{a}},\quad \varphi = \tfrac{1}{3}(\omega + k.\ 360^0).$$

Also hat die gegebene Gleichung die Wurzeln

$$r\cos\tfrac{1}{3}\omega,\quad r\cos(\tfrac{1}{3}\omega + 120^0),\quad r\cos(\tfrac{1}{3}\omega + 240^0),$$

wobei r eine positive Zahl und ω einen spitzen Winkel bedeutet.

Anmerkung. Die Cardanische Formel erfordert in diesem Falle die Cubikwurzeln der conjugirten Complexen

$$b + i\sqrt{a^3 - b^2} = \varrho e^{i\omega},\qquad b - i\sqrt{a^3 - b^2} = \varrho e^{-i\omega},$$

wobei $\varrho^2 = a^3$, $\varrho\cos\omega = b$ sich ergiebt (Allg. Arithm. §. 31, 10). Die Summe der Cubikwurzeln beträgt

$$\varrho^{\frac{1}{3}}\left(e^{i\cdot\frac{1}{3}(\omega+2k\pi)} + e^{-i\cdot\frac{1}{3}(\omega+2k\pi)}\right) = 2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\tfrac{1}{3}(\omega + 2k\pi)$$

übereinstimmend mit den gefundenen Werthen.

Wenn a positiv ist, so hat die trinomische Gleichung

*) Die Trisection des Winkels ω ist auf die Auflösung einer cubischen Gleichung von Bombelli reducirt worden. Das umgekehrte Verfahren kommt bei Vieta, und in constructiver Darstellung bei Descartes (Géom. III) vor. Vergl. Klügel math. W. I p. 38. 44. 53.

$$x^m - x - a = 0$$

eine positive Wurzel zwischen 1 und $1 + a$, welche unter den realen Wurzeln der Gleichung die größte ist, weil $1^m - 1 - a$ negativ, $(1 + a)^m - 1 - 2a$ positiv ist. Dieser Wurzel nähert man sich durch die Berechnung von*)

$$b_1 = \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a}}, \quad b_2 = \sqrt[m]{a + b_1}, \quad b_3 = \sqrt[m]{a + b_2}, \ldots$$

Denn es ist $b_1 > \sqrt[m]{a}$, $b_2 > b_1$, $b_3 > b_2$, .. und die Größen b_1, b_2, b_3, .. bilden eine steigende Reihe. Dabei hat man

$$b_k{}^m - b_{k-1} - a = 0, \quad b_k{}^m - b_k - a < 0.$$

Also kann keine der Größen b_1, b_2, b_3, .. die größte reale Wurzel der Gleichung $x^m - x - a = 0$ übersteigen.

6. Die Auflösung einer biquadratischen Gleichung kann auf die Auflösung der besondern biquadratischen Gleichung

$$x^4 + 4ax^2 + 8bx + 4c = 0$$

zurückgeführt werden (1, 2). Die Wurzeln dieser Gleichung lassen sich durch die Wurzeln einer bestimmten cubischen Gleichung (Resolvente) ausdrücken**). Wenn

$$t + u + v = \alpha, \quad tu + tv + uv = \beta, \quad tuv = \gamma,$$

so ist

$$(y - t)(y - u)(y - v) = y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma$$

und die Gleichung $y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma = 0$ für die Unbekannte y hat die Wurzeln t, u, v (§. 4, 2). Wenn nun

$$x = \sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v},$$

so findet man

$$x^2 = \alpha + 2\sqrt{tu} + 2\sqrt{tv} + 2\sqrt{uv}$$
$$\tfrac{1}{4}(x^2 - \alpha)^2 = \beta + 2x\sqrt{\gamma}$$
$$x^4 - 2\alpha x^2 - 8x\sqrt{\gamma} + \alpha^2 - 4\beta = 0.$$

---

*) Bolyai Tentamen in elem. math. etc. Maros Vasarhely 1832 t. 1 p. 413.

**) Diese Erfindung ist von Ludovico Ferrari gemacht, von Cardano 1545 (Ars magna c. 39) und Bombelli 1572 mitgetheilt worden. Vergl. Klügel math. W. I p. 38. Den hier eingeschlagenen Weg der Reduction hat Euler 1738 (Comm. Petrop. 6 p. 233) angegeben. Die zur Auflösung der biquadratischen Gleichung erforderliche cubische Gleichung heißt die Resolvente bei Euler, Réduite bei Clairaut u. A. Man kann auch aus der vollständigen biquadratischen Gleichung mit 5 Gliedern eine verkürzte cubische Resolvente mit 3 Gliedern ableiten. Vergl. Aronhold Crelle J. 52 p. 95. Fiedler Elem. d. Geom. u. Algebra p. 163. Bei dieser Reduction ist die Determination weniger einfach.

Diese 2deutige biquadratische Gleichung für x hat demnach die 8deutige Wurzel $\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$, wenn t, u, v die Wurzeln der Resolvente d. i. der cubischen Gleichung $y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma = 0$ bedeuten.

Die aufzulösende biquadratische Gleichung stimmt mit der auflösbaren überein unter den Bedingungen

$$4a = -2\alpha, \quad 8b = -8\sqrt{\gamma}, \quad 4c = \alpha^2 - 4\beta.$$

Hieraus folgt $\alpha = -2a$, $\beta = a^2 - c$, $\gamma = b^2$, und die Resolvente der gegebenen Gleichung

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 - c)y - b^2 = 0.$$

Aus den Wurzeln t, u, v der Resolvente findet man als Wurzeln der gegebenen Gleichung die 4 Werthe der Formel $\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$, welche der Bedingung $\sqrt{t}\sqrt{u}\sqrt{v} = \sqrt{\gamma} = -b$ genügen.

7. Die angegebene Resolvente hat mindestens eine positive reale Wurzel v, weil die cubische Function $y^3 + 2ay^2 + (a^2 - c)y - b^2$ bei hinreichend großen positiven Werthen von y positiv, bei verschwindendem y negativ ist (4). Wenn die beiden andern Wurzeln t, u der Resolvente real sind, so haben sie einerlei Zeichen, weil das Product $tuv = b^2$ positiv ist.

Wenn nun t, u beide positiv sind, so hat die aufzulösende biquadratische Gleichung 4 reale Wurzeln. Wenn t, u beide negativ sind, so hat die Gleichung 2 Paare von complexen Wurzeln. Denn unter der Voraussetzung $t = -g^2$, $u = -h^2$ hat $\sqrt{t} + \sqrt{u}$ die Werthe

$$ig + ih, \quad -ig - ih, \quad ig - ih, \quad -ig + ih,$$

so daß $\sqrt{t}\sqrt{u}$ in den beiden ersten Fällen negativ, in den beiden letzten Fällen positiv ist.

Wenn aber t, u conjugirt complex sind, so hat die biquadratische Gleichung ein Paar complexe und 2 reale Wurzeln. Denn unter der Voraussetzung

$$t = 2p + 2iq, \quad u = 2p - 2iq, \quad r^2 = p^2 + q^2,$$

findet man (Allg. Arithm. §. 16, 7)

$$\sqrt{t} = \sqrt{r+p} + i\sqrt{r-p}, \quad \sqrt{u} = \sqrt{r+p} - i\sqrt{r-p},$$

und die zusammengehörigen Werthe

$\sqrt{t} + \sqrt{u}$	$2\sqrt{r+p}$	$-2\sqrt{r+p}$	$2i\sqrt{r-p}$	$-2i\sqrt{r-p}$
$\sqrt{t}\sqrt{u}$	$2r$	$2r$	$-2r$	$-2r$

Die Wurzeln einer allgemeinen Gleichung, deren Grad den 4ten übersteigt, können explicite irrationale Functionen der Coefficienten nicht sein, wie Abel 1825 (Crelle J. 1 p. 65) bewiesen hat. Vergl. Wantzel in Serret Alg. sup. 22. Scheibner Berichte d. Leipz. Ges. d. W. 1863 p. 63. Daß die allgemeine Gleichung 5ten Grades mit Hülfe transscendenter Functionen aufgelöst werden kann, hat Hermite ge-

zeigt (Compt. rend. 1858[a] p. 508). Vergl. Kronecker Monatsbericht der Berliner Acad. 1861 Juni 27. Brioschi Istituto Lombardo 1858 Nov. 25.

8. Wenn unter den Coefficienten der Gleichung $2n$ten Grades

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$$

die ersten $n + 1$ willkürlich, die folgenden aber so gegeben sind, daß

$$a_{n+1} = a_{n-1}\varepsilon, \quad a_{n+2} = a_{n-2}\varepsilon^2, \ldots, \quad a_{n+k} = a_{n-k}\varepsilon^k, \ldots$$

ist, so gehören die Wurzeln der Gleichung paarweise zusammen. Das Product von je zwei zusammengehörigen Wurzeln ist ε, und die Summe derselben ist eine Wurzel einer bestimmten Resolvente $n$ten Grades. Wenn insbesondere $\varepsilon = 1$ ist, so heißt die gegebene Gleichung reciprok*).

Indem man nämlich durch x^n dividirt, findet man die Gleichung

$$a_n + a_{n-1}\left(x + \frac{\varepsilon}{x}\right) + \ldots + a_0\left(x^n + \frac{\varepsilon^n}{x^n}\right) = 0,$$

welche bei der Vertauschung von x mit $\frac{\varepsilon}{x}$ unverändert bleibt. Wenn also α eine Wurzel dieser Gleichung ist, so ist auch $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ eine Wurzel derselben.

Setzt man $x + \frac{\varepsilon}{x} = u$, folglich (Allg. Arithm. §. 9, 5)

$$x^2 + \frac{\varepsilon^2}{x^2} = u^2 - 2\varepsilon$$

$$x^3 + \frac{\varepsilon^3}{x^3} = u^3 - 3u\varepsilon$$

$$x^4 + \frac{\varepsilon^4}{x^4} = u^4 - 4u^2\varepsilon + 2\varepsilon^2$$

u. s. w., so erhält man die Resolvente $n$ten Grades für u

$$a_n + a_{n-1}u + a_{n-2}(u^2 - 2\varepsilon) + a_{n-3}(u^3 - 3u\varepsilon) + \ldots = 0.$$

Durch Auflösung der quadratischen Gleichung für x

$$x^2 - ux + \varepsilon = 0$$

---

*) Nach Euler Comm. Petrop. 1738 t. 6 p. 223. Die Bildung der Resolvente fällt mit der von Jac. Bernoulli (Mém. de Paris 1702. Opp. II n° 97) gegebenen Entwickelung von $\cos kx$ nach Potenzen von $\cos x$ zusammen, und war auch von Moivre (Misc. anal. III, 4) gezeigt worden. Den hierzu erforderlichen Ausdruck von $x^k + y^k$ durch $x + y$ und xy hat Lagrange (Mém. de Berlin 1768. Nouvelle méthode etc. §. 1) als besondern Fall eines allgemeinern Ausdrucks dargestellt.

findet man zu jeder Wurzel der Resolvente ein Paar Wurzeln der gegebenen Gleichung.

9. Wenn unter den Coefficienten der Gleichung $(2n + 1)$ten Grades

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$$

die ersten $n + 1$ willkürlich, die folgenden aber so gegeben sind, daß

$$a_{n+1} = a_n\varepsilon,\ a_{n+2} = a_{n-1}\varepsilon^3,\ \ldots,\ a_{n+1+k} = a_{n-k}\varepsilon^{2k+1},\ \ldots$$

ist, so hat eine Wurzel der Gleichung den Werth $-\varepsilon$, und die übrigen Wurzeln sind so gepaart, daß das Product jedes Paares ε^2 ergiebt. Denn das Polynomium

$$a_0(x^{2n+1} + \varepsilon^{2n+1}) + a_1x(x^{2n-1} + \varepsilon^{2n-1}) + a_2x^2(x^{2n-3} + \varepsilon^{2n-3}) + \ldots$$

ist durch $x + \varepsilon$ theilbar (Allg. Arithm. §. 12, 5). Der Quotient ist

$$\begin{array}{r|r|r|l} a_0x^{2n} - a_0\varepsilon & x^{2n-1} + a_0\varepsilon^2 & x^{2n-2} - \ldots - a_0\varepsilon & \varepsilon^{2n-2}x + a_0\varepsilon^{2n} \\ + a_1 & - a_1\varepsilon & + \ldots + a_1 & \\ & + a_2 & - \ldots & \\ & & + \ldots & \end{array}$$

Setzt man nun sowohl den Divisor $x + \varepsilon$, als auch den Quotienten der Null gleich, so erhält man als Wurzeln der gegebenen Gleichung $-\varepsilon$ und die Wurzeln einer besondern Gleichung $2n$ten Grades, deren Coefficienten den vorher (8) gestellten Bedingungen genügen.

§. 8. Transscendente Gleichungen und Auflösung numerischer Gleichungen.

(Heis §§. 106. 100).

1. Die einfachste Classe von transscendenten Gleichungen bilden die Exponentialgleichungen, in denen unbekannte Exponenten von bekannten oder unbekannten Dignanden vorkommen, die logarithmischen Gleichungen, in denen Logarithmen von unbekannten Numern vorkommen, und die goniometrischen Gleichungen, in denen goniometrische Functionen von unbekannten Winkeln (Kreisbogen) vorkommen.

Wenn die Exponentialgleichung binomisch ist und nur bekannte Dignanden enthält, so kann sie auf eine algebraische Gleichung reducirt werden. Denn aus der Gleichung

$$a^p\, b^q = c^r\, d^s$$

folgt (Allg. Arithm. §. 19) die Gleichung

$$p\log a + q\log b = r\log c + s\log d,$$

welche algebraisch ist, wenn a, b, c, d bekannt sind und p, q, r, s algebraische Functionen von einer oder mehr Unbekannten bedeuten. Dabei ist jeder Logarithmus unendlichdeutig (Allg. Arithm. §. 31).

Umgekehrt ist die Gleichung $p \log t + q \log u = r \log v$ gleichbedeutend mit der Gleichung $t^{\mathrm{p}} u^{\mathrm{q}} = v^{\mathrm{r}}$, welche algebraisch ist, wenn p, q, r bekannt und t, u, v algebraische Functionen von einer oder mehr Unbekannten sind.

Die Exponentialgleichung $a + bp^{\beta \mathrm{x}} + cp^{\gamma \mathrm{x}} + \ldots = 0$ wird durch die Substitution $p^{\mathrm{x}} = y$ auf die Gleichung $a + by^{\beta} + cy^{\gamma} + \ldots = 0$ reducirt.

Die Gleichung $x^{\mathrm{a} + \mathrm{b} \log \mathrm{x}} = c$ oder $(a + b \log x) \log x = \log c$ wird durch die Substitution $\log x = y$ auf die Gleichung $ay + by^2 = \log c$ reducirt*).

2. Goniometrische Gleichungen sind algebraisch reducibel, wenn sie nach gehöriger Entwickelung nur eine Function eines unbekannten Winkels und Potenzen derselben mit gegebenen Exponenten enthalten. Z. B. Die Gleichung $a \sin x + b \cos x = c$ kann reducirt werden, indem man $\sin x = y$, $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$ setzt. Einfacher kommt man zum Ziele, wenn man

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha$$

setzt, so daß α und r aus den Gleichungen

$$\cot \alpha = \frac{a}{b}, \quad r = \frac{a}{\cos \alpha}$$

gefunden werden. Dadurch erhält man statt der gegebenen Gleichung

$$r \sin x \cos \alpha + r \sin \alpha \cos x = c,$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{r}$$

woraus sich zwei supplementäre Werthe von $x + \alpha$ ergeben.

Die Gleichung $\sin x = a \sin(\alpha - x)$ wird reducirt, indem man

$$x = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\alpha - x = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

setzt, und die Gleichung $\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = a \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$ entwickelt. Man erhält

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = \frac{a - 1}{a + 1} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha$$

---

*) Heis §§. 61. 65. 69. 73.

und findet daraus 2 um 180^0 verschiedene Werthe von $\frac{1}{2}\beta$, und durch Addition derselben zu $\frac{1}{2}\alpha$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Um das System*)

$$x \sin(\alpha - y) = a$$
$$x \sin(\beta - y) = b$$

für x und y aufzulösen, bilde man

$$\sin(\alpha - y) + \sin(\beta - y) = 2 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - 2y) \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a+b}{x}$$

$$\sin(\alpha - y) - \sin(\beta - y) = 2 \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - 2y) \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{x}$$

und daraus durch Division

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - 2y) = \frac{a+b}{a-b} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

zur Berechnung von y, aus dessen Werth x sich ergiebt.

3. Transscendente Gleichungen, welche sich auf algebraische nicht reduciren lassen, sind z. B. $a^x + b^x = c$, $a^x = bx + c$, $x^x = a$, $ax + b \log x + cx \log x = 0$, $\cos x = x$, $\cot x = x$, $\operatorname{tang} x = x$, $x - a \sin x = b$, u. s. f. In den angeführten goniometrischen Gleichungen bedeutet x das Verhältniß eines Centriwinkels zu dem πten Theile von 180^0, oder was dasselbe ist, das Verhältniß des eingeschriebenen Kreisbogens zum Radius, oder den Kreisbogen selbst, wenn der Radius eine Längeneinheit ist. Hat der Bogen x Radien und der Centriwinkel y Grad, so ist

$$x = \frac{y\pi}{180}, \quad \log x = \log y + 8{,}2419 - 10.$$

Und wenn der Centriwinkel y Minuten hat, so ist

$$x = \frac{y\pi}{180 \,.\, 60}, \quad \log x = \log y + 6{,}4637 - 10.$$

Die Zahlen $\log(\pi : 180)$ und $\log(\pi : 180 \,.\, 60)$ werden in den Tabellen durch $\log 1^0$ und $\log 1'$ bezeichnet.

4. Die realen Wurzeln von Gleichungen beliebiger Art können mit jeder erforderlichen Genauigkeit begrenzt werden, wenn die Gleichungen numerisch (numerales) sind d. h. wenn in ihnen unbestimmte Zahlen nicht vorkommen. Um zu erkennen, für welche realen Werthe von x die gegebene Function $f(x)$ verschwindet, berechne man die Anfänge einer

---

*) Gauß theoria motus 78.

Tabelle, welche neben realen Werthen von x die zugehörigen Werthe von $f(x)$ enthält. Wenn nun in der Tabelle auf den Werth $f(a)$ ein Werth $f(b)$ von entgegengesetztem Zeichen folgt, und $f(x)$ von $f(a)$ zu $f(b)$ stetig und ohne Umkehr übergeht, während x von a zu b übergeht, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine (und nicht mehr als eine, wenn auch mehrfache) zwischen a und b liegende Wurzel (§. 2, 4). Um diese Wurzel enger zu begrenzen, vervollständige man die Tabelle durch Berechnung von $f(x)$ für Werthe von x zwischen a und b. Diese Arbeit wird wesentlich erleichtert und auf das Nöthigste beschränkt durch Anwendung der regula falsorum, wie die Algebristen des 15ten und 16ten Jahrhunderts gezeigt haben. Vgl. Euler Introd. I cap. 22. Die gesuchte Differenz der Variablen ist nämlich um so genauer proportional der erforderlichen Differenz der Function, je kleiner die letztere Differenz ist (§. 2, 4).

Beispiel 1. Um die Gleichung $10^x = x^{10}$ aufzulösen, nimmt man die Logarithmen beider Seiten und erhält $x = 10 \log x$, $10 \log x - x = 0$. Bezeichnet man die Function $10 \log x - x$ durch y, und berechnet die Werthe von y für $x = 0, 1, 2$, welche in der nebenstehenden Tabelle enthalten sind, so erkennt man, daß y verschwindet für einen Werth von x zwischen 1 und 2, daß zur Aenderung von y um 2,01 eine Aenderung von x um 1 gehört. Nach der Regel gehört dann zur Aenderung von y um 1 eine Aenderung von x um ungefähr

x	y
0	$-\infty$
1	-1
2	1,01

$$\frac{1 \,.\, 1}{2{,}01} = 0{,}4.$$

Demnach berechnet man neue Werthe von y, aus denen man erkennt, daß y verschwindet für einen Werth von x zwischen 1,4 und 1,3; daß zur Aenderung von y um 0, 221 eine Aenderung von x um 0,1 gehört. Also gehört zur Aenderung von y um 0,061 eine Aenderung von x um

x	y
1,4	0,061
1,3	$-$ 0,160

$$\frac{0{,}1 \,.\, 0{,}061}{0{,}221} = 0{,}028$$

welche auf $x = 1{,}4 - 0{,}028 = 1{,}372$ hinzeigt. Nun berechnet man neue Werthe von y, welche zu erkennen geben, daß y verschwindet für einen Werth von x zwischen 1,372 und 1,371, daß zur Aenderung von y um 0,0021 eine Aendernng von x um 0,001 gehört. Demnach gehört zur Aenderung von y um 0,0006 eine Aenderung von x um

x	y
1,372	0,0015
1,371	$-$ 0,0006

$$\frac{0{,}001 \,.\, 0{,}0006}{0{,}0021} = 0{,}0003$$

welche $x = 1{,}3713$ als die gesuchte Wurzel anzeigt. Zu größerer Annäherung auf demselben Wege führen ausführlichere Tabellen der Logarithmen. Die Geschwindigkeit der Annäherung wird in der Nähe größer.

Beispiel 2. Die Gleichung $5^x + 6^x = 7x^2$ hat eine Wurzel zwischen 0 und -1, denn $5^x + 6^x - 7x^2$ hat für $x = 0$ den Werth 2, für $x = -1$ den Werth $-6\frac{1}{3}\frac{9}{0}$. Setzt man

$$\log(5^x + 6^x) - \log x^2 - \log 7 = y,$$

so erhält man folgendes System:

x	y
$-0{,}3$	$0{,}2803$
$-0{,}4$	$-0{,}0434$
$-0{,}387$	$-0{,}0050$
$-0{,}3853$	$-0{,}0002$

Damit y verschwindet, ist die Variable von $-0{,}4$ nach $-0{,}3$ um $\frac{0{,}1 \,.\, 434}{3237} = 0{,}013$ zu ändern. Ferner ist x von $-0{,}4$ nach $-0{,}387$ um $\frac{0{,}013 \,.\, 50}{384} = 0{,}0017$ zu ändern, wodurch man eine Wurzel der gegebenen Gleichung zwischen $-0{,}3853$ und $-0{,}3852$ findet.

Beispiel 3. Um die Gleichung $\cos x = x$ aufzulösen, setze man $\log x - \log\cos x = z$. Unter Zuziehung des Winkels y (3) findet man folgendes System:

y	z
45^0	$0{,}0456$
40^0	$-0{,}0403$
$42^0\ 20'$	$-0{,}0003$
$42^0\ 21'$	$0{,}0000$

Der Winkel ist von 45^0 und 40^0 um $\frac{5^0 \,.\, 403}{859} = 2^0{,}33$ zu ändern, damit z verschwindet, u. s. w. Aus dem letzten Werth von y wird der gesuchte Werth von x berechnet.

Beispiel 4. Wenn eine Versorgungsanstalt p Procent jährlich zu capitalisirende Zinsen berechnet, und 100 Gulden gegen eine 35jährige Rente von 6 Gulden zahlt, so ist $\frac{6}{p}(1 - 1{,}0p^{-35}) = 1$ (Allg. Arithm. §. 22, 6). Setzt man $\log 6 + \log(1 - 1{,}0p^{-35}) - \log p = y$, so ergiebt sich eine reale Wurzel der Gleichung aus folgendem System:

p	y
4	$0{,}0492$
5	$-0{,}0076$
4,87	$-0{,}0005$
4,86	$0{,}0001$

Damit y verschwindet, hat man p von 5 nach 4 um $\frac{76}{568} = 0{,}13$ zu ändern; ferner von 4,86 nach 4,87 um $\frac{0{,}01}{6} = 0{,}002$. Die gesuchte Wurzel hat demnach den Werth 4,862.

Hierher gehört auch Gauß' Auflösung der trinomischen Gleichungen (Beiträge zur Theorie der algebr. Gleich. 1849. Abhandl. der Gött. Ges. d. Wiss. IV).

5. Bei algebraischen Gleichungen läßt sich statt der vorigen allgemeinen Methode eine beträchtlich einfachere anwenden, welche Newton (Brief an Oldenburg 1676 Jun. 13, ausführlicher im Anfang der methodus fluxionum) gelehrt hat.

Statt einer über 10 betragenden Wurzel kann ihr 10ter, 100ter, .. Theil gesucht werden (§. 7, 1), so daß nächst den Einern der Wurzel immer nur ein echter Bruch durch Transformationen der gegebenen Gleichung zu bestimmen bleibt.

Beispiel 1. $y = x^3 - 2x - 5$ geht aus dem Negativen ins Positive, während x von 2 bis 3 steigt. Also hat die Gleichung $y = 0$ eine reale Wurzel $x = 2 + p$, wobei p einen näher zu berechnenden echten Bruch bedeutet. Durch die Substitution $x = 2 + p$ findet man (nach dem §. 7, 2 angezeigten Verfahren) die erste Transformirte

$$y = -1 + 10p + 6p^2 + p^3$$

deren Anfangsglieder überwiegen. Um den Werth von p zu berechnen, bei welchem $y = 0$ wird, macht man den Versuch

$$-1 + 10p = 0, \quad p = 0,1\,.., \quad 6p^2 + .. = 0,06\,..$$

so daß bei unsichern Hunderteln des Dividenden

$$p = 1,0\,.. : 10 = 0,1 + q$$

gesetzt wird. Durch diese Substitution findet man die zweite Transformirte

$$y = 0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3.$$

Der Versuch $0,061 + 11,23q = 0$, $q = -0,005\,..$, $6,3q^2 + .. = 0,0001\,..$ giebt bei unsichern Zehntausendteln des Dividenden

$$q = -0,061\,.. : 11,23 = -0,0054 + r.$$

Durch diese Substitution findet man die dritte Transformirte, und zwar abgekürzt, indem man die Potenzen von q nach steigenden Potenzen von r entwickelt,

$$\begin{array}{rlrl} y = & \,0,061 & & \\ & -\,0,060\,642 & +\;11,23r & \\ & +\,0,000\,183\,708 & -\;\;0,0680r & * \\ & -\,0,000\,000\,157 & +\;\;0,0001r & * \\ \hline & \,0,000\,541\,551 & +\;11,1621r & * \end{array}$$

Der Versuch $0,000\,541\,551 + 11,1621r = 0$ giebt $r = -0,000\,048\,516$. Also ist

$$\begin{aligned} x = \; & 2{,}1 \\ & - 0{,}0054 \\ & - 0{,}000048516 \\ \hline & 2{,}094551484. \end{aligned}$$

Beispiel 2. $y = x^5 - 6x - 10$ geht aus dem Negativen ins Positive, während x von 1 bis 2 steigt. Also hat die Gleichung $y = 0$ die Wurzel $x = 2 + p$. Durch diese Substitution findet man die erste Transformirte

$$y = 10 + 74p + 80p^2 + 40p^3 + 10p^4 + p^5.$$

Der Versuch $10 + 74p = 0$ giebt $p = -0{,}13$ mit geringer Annäherung, weil $80p^2 + .. = 1{,}3\ldots$ Durch den Versuch $10 + 74p + 80p^2 = 0$ findet man den genauern Werth $p = -0{,}16..$ nebst $40p^3 + .. = -0{,}16\ldots$ Daher bildet man durch die Substitution $p = -0{,}16 + q$ die zweite Transformirte abgekürzt

$$\begin{array}{rrrrl} y = & 10 & & & \\ & -11{,}84 & +74q & & \\ & +2{,}048 & -25{,}6q & +80q^2 & \\ & -0{,}16384 & +3{,}072q & -19{,}2q^2 & * \\ & +0{,}0065536 & -0{,}1638q & +1{,}5q^2 & * \\ & -0{,}0001048 & +0{,}0033q & * & * \\ \hline & 0{,}0506088 & +51{,}3114q & +62{,}3q^2 & * \end{array}$$

Der Versuch $0{,}050.. + 51{,}..\,q = 0$ giebt

$$q = -0{,}001..\ \text{und}\ 62{,}3q^2 + .. = 0{,}00006..$$

Also setzt man

$$q = -0{,}0506 : 51{,}3 = -0{,}000986 + r$$

und bildet die dritte Transformirte

$$\begin{array}{rrl} y = & 0{,}0506088 & \\ & -0{,}0505930 & +51{,}3r \\ & +0{,}0000604 & -0{,}1r \\ \hline & 0{,}0000762 & +51{,}2r \end{array}$$

welche bei $r = -0{,}00000149$ verschwindet. Daher ist

$$\begin{aligned} x = \; & 2 \\ & - 0{,}16 \\ & - 0{,}000986 \\ & - 0{,}00000149 \\ \hline & 1{,}83901251. \end{aligned}$$

Beispiel 3. $y = x^3 - 7x + 7$ verschwindet zweimal, während x von 1 bis 2 steigt. Durch die Substitution $x = 1{,}5 + p$ erhält man die erste Transformirte

$$y = -0{,}125 - 0{,}25p + 4{,}5p^2 + p^3$$

und $-0{,}125 - 0{,}25p + 4{,}5p^2 = 0$ giebt $p = 0{,}2$ und $-0{,}14$.

I. Durch die Substitution $p = 0{,}2 + q$ erhält man

$$y = 0{,}013 + 1{,}67q + 5{,}1q^2 + q^3.$$

Der Versuch $0{,}013 + 1{,}67q = 0$ giebt
$q = -0{,}013 : 1{,}67 = -0{,}008 + r$, weil $5{,}1q^2 + .. = 0{,}0003..$
Aus der Transformirten

$$y = -0{,}000\,034\,112 + 1{,}588\,592r + 5{,}076r^2 + r^3$$

schließt man

$$r = 0{,}000\,034\,11 : 1{,}5886 = 0{,}000\,021\,48$$

$$x = 1{,}692\,021\,48.$$

II. Durch die Substitution $p = -0{,}14 + q$ erhält man

$$y = -0{,}004\,544 - 1{,}4512q + 4{,}08q^2 + q^3.$$

Der Versuch $-0{,}004\,544 - 1{,}4512q = 0$ giebt
$q = -0{,}0045 : 1{,}45 = -0{,}0031$, weil $4{,}08q^2 + .. = 0{,}000\,03..$

$$x = 1{,}3569.$$

Beispiel 4. $6x^3 - 141x + 263$ verschwindet zweimal, während x von 2 bis 3 steigt. Durch die Substitution $x = 2{,}8 + p$ erhält man

$$y = -0{,}088 + 0{,}12p + 50{,}4p^2 + 6p^3.$$

Der Versuch $-0{,}088 + 0{,}12p + 50{,}4p^2 = 0$ giebt $p = 0{,}03$ und $-0{,}05$.

I. Durch die Substitution $p = 0{,}03 + q$ erhält man

$$y = -0{,}038\,878 + 3{,}1602q + 50{,}94q^2 + 6q^3.$$

Der Versuch $-0{,}038\,878 + 3{,}1602q = 0$ giebt nur

$$q = 0{,}01 + r, \text{ weil } 50{,}94q^2 + .. = 0{,}005\ldots$$

Aus der Transformirten

$$y = -0{,}002\,176 + 4{,}1808r + 51{,}12r^2 + 6r^3$$

folgt $r = 0{,}0005$, weil $51{,}12r^2 + .. = 0{,}000\,01\ldots$ Die nächste Transformirte

$$y = -0{,}000\,072\,819\,25 + 4{,}231\,9245s + 51{,}129s^2 + 6s^3$$

giebt $s = 0{,}000\,017\,21$, weil $51s^2 + .. = 0{,}000\,000\,005..$, so daß

$$x = 2{,}800\,517\,21.$$

II. Durch die Substitution $p = -0{,}05 + q$ erhält man

$$y = 0{,}031\,25 - 4{,}875q + 49{,}5q^2 + 6q^3.$$

Hieraus folgt $q = 0{,}007 + r$ weil $49{,}5q^2 + .. = 0{,}002\ldots$ Die nächste Transformirte

$$y = -0{,}000\,447\,442 - 4{,}181\,118r + 49{,}626r^2 + 6r^3$$

giebt $r = -0{,}000\,107$, weil $49{,}6r^2 + .. = 0{,}000\,0005..$, so daß

$$x = 2{,}756\,893.$$

Anmerkung. Newton's Methode hat durch Euler, Lagrange u. A. eine angeblich einfachere Darstellung erhalten, indem man für die Correctionen $p, q, ..$

eine allgemeine Formel aufstellte. Nur diese in der Praxis mühevollere Darstellung wird von den Einwendungen getroffen, welche Lagrange (Mém. de Berlin 1767 p. 311, Traité des équat. Note V) gegen die Newton'sche Methode erhoben hat. Vergl. einen Aufsatz des Verf. in den Leipziger Berichten 1866 p. 358.

§. 9. Besondere Auflösung unbestimmter Gleichungen.

(Heis §§. 77—80).

1. Eine unbestimmte Gleichung oder ein unbestimmtes System von Gleichungen hat im Allgemeinen unendlich viele Auflösungen (§. 5). Wenn insbesondere die Coefficienten der Gleichungen ganze (rationale) Zahlen sind, so entsteht die Frage, durch welche ganze (rationale) Werthe der Unbekannten den Gleichungen genügt werden kann (Diophantische Aufgabe). Die Beantwortung dieser Frage ist der Gegenstand der unbestimmten Analytik (analyse indéterminée), welche mit der höheren Arithmetik (Zahlenlehre) im engsten Zusammenhange steht.

2. Wenn a und b ganze Zahlen und prim zu einander sind, so lassen sich unendlich viele Systeme ganzer Zahlen x, y angeben, die der linearen Gleichung $ax + by = c$ genügen. Man bilde nach dem Modul b die Reste der Zahlen c, $c - a$, $c - 2a$, . ., $c - (b - 1)a$. Diese b Reste sind von einander verschieden (Allg. Arithm. §. 13, 19) und geringer als b, also muß einer derselben 0 sein. Hat $c - ax$ nach dem Modul b den Rest 0, so ist der Quotient eine ganze Zahl y. Wenn aber x und y der gegebenen Gleichung genügen, so genügen ihr auch $x + bz$ und $y - az$, weil

$$a(x + bz) + b(y - az) = ax + by = c.$$

Wenn δ der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen a und b ist, so giebt es keine ganzen Zahlen x und y, welche der Gleichung $ax + by = c$ genügen, außer in dem Falle, daß auch c durch δ theilbar ist. Wenn nun x und y der gegebenen Gleichung genügen, so genügen ihr auch $x + \frac{b}{\delta}z$ und $y - \frac{a}{\delta}z$, und es giebt δ Werthe von x, die nach dem Modul b incongruent sind, und ebensoviel nach dem Modul a incongruente Werthe von y.

3. Um die Gleichung $ax + by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen, wählt man, wenn a prim zu b und $a < b$, die Anordnung $ax = c - by$, woraus durch Division

$$x = d - ey + \frac{c_1 - a_1 y}{a}$$

folgt. Weil aber $c_1 - a_1 y$ durch a theilbar sein soll, so setzt man

$$c_1 - a_1 y = ap, \quad a_1 y = c_1 - ap$$

und findet wiederum durch Division

$$y = d_1 - e_1 p + \frac{c_2 - a_2 p}{a_1},$$

wobei $c_1 - a_2 p$ durch a_1 theilbar sein soll, u. s. w. Die Reihe der Reste $a_1, a_2, \ldots$ fällt bis auf 1 herab (Allg. Arithm. §. 13, 3), und dabei geht die Reihe der erforderlichen Substitutionen zu Ende. Durch einen besondern Werth der letzten Unbestimmten werden dann alle vorausgehenden Unbestimmten ausgedrückt. Die Anzahl der Divisionen wird möglichst klein, wenn man die kleinsten (nach Befinden negativen) Reste gebraucht.

Beispiel 1.

$$7x = 1000 - 24y, \quad x = 143 - 3y - \frac{3y + 1}{7}$$

$$3y = -1 + 7p, \quad y = 2p + \frac{p - 1}{3}$$

$$p = 1 + 3q.$$

Insbesondere ist $p = 1$, $y = 2$, $x = 136$, also allgemein (2)

$$x = 136 - 24q, \quad y = 2 + 7q,$$

worin q jede ganze Zahl (positiv oder negativ) bedeutet.

Beispiel 2. Um 243 in 2 Theile zu theilen, von denen der eine durch 24, der andere durch 65 theilbar ist, setze man den ersten Theil $= 24x$, den zweiten Theil $= 65y$, und $24x + 65y = 243$.

$$24x = 243 - 65y, \quad x = 10 - 3y + \frac{7y + 3}{24}$$

$$7y = 3(-1 + 8p), \quad y = 3\left(p + \frac{p - 1}{7}\right)$$

$$p = 1 + 7q.$$

Für $q = 0$ erhält man $p = 1$, $y = 3$, $x = 2$, folglich überhaupt

$$y = 3 + 24q, \quad x = 2 - 65q.$$

Die vorgelegte Aufgabe hat nur eine Auflösung in positiven ganzen Zahlen. Mit dieser Aufgabe trifft die Forderung zusammen, den Bruch $\frac{243}{24.65}$ in die Summe von zwei Brüchen zu zerlegen, deren Nenner 65 und 24 sind.

Beispiel 3. Um die Zahlen zu finden, welche nach dem Modul 27 den Rest 14, nach dem Modul 37 den Rest 25 haben, setze man $27x + 14 = 37y + 25$.

$$27x = 11 + 37y, \qquad x = y + \frac{10y + 11}{27}$$

$$10y = -11 + 27p, \qquad y = -1 + 3p - \frac{3p + 1}{10}$$

$$3p = -1 + 10q, \qquad p = 3q + \frac{q - 1}{3}$$

$$q = 1 + 3r.$$

Für $r = 0$ erhält man $q = 1$, $p = 3$, $y = 7$, $x = 10$, also überhaupt

$$y = 7 + 27r, \quad x = 10 + 37r.$$

Die gesuchten Zahlen sind

$$37(7 + 27r) + 25 = 27(10 + 37r) + 14 = 284 + 999r.$$

4. Die zur Auflösung der Gleichung $ax - by = c$ gebildete Kette von Gleichungen

$$\begin{array}{ll} ax = by + c & x = ey + p \\ a_1 y = ap - c & y = e_1 p + q \\ a_2 p = a_1 q + c & p = e_2 q + r \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

beruht auf der Kette von Gleichungen

$$\begin{array}{l} b = ae + a_1 \\ a = a_1 e_1 + a_2 \\ a_1 = a_2 e_2 + a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

durch welche der Bruch $a : b$ in einen Kettenbruch so entwickelt wird, daß die Zähler der Glieder positive oder negative Einheiten sind. Ist nun z. B. a_3 eine Einheit, so kann man $r = 0$ wählen und erhält die besondern Werthe q', p', y', x' für q, p, y, x von der Art, daß

$$\frac{q'}{p'} = \frac{1}{e_2}, \quad \frac{p'}{y'} = \frac{1}{e_1} \dot{+} \frac{1}{e_2}, \quad \frac{y'}{x'} = \frac{1}{e} \dot{+} \frac{1}{e_1} \dot{+} \frac{1}{e_2}.$$

Daher ist der letzte Näherungsbruch $\frac{\lambda}{\mu}$ für den Kettenbruch

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{e} \dot{+} \frac{1}{e_1} \dot{+} \frac{1}{e_2} \dot{+} \frac{1}{a_2}$$

ein besonderer Werth von $\frac{y}{x}$. In der That hat man unter dieser Vor-

aussetzung (Allgem. Arithm. §. 30, 4)

$$a\mu - \lambda b = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1,$$

$$a \, . \, \varepsilon c\mu - b \, . \, \varepsilon c\lambda = c.$$

Also genügen der gegebenen Gleichung die Werthe*)

$$x = \varepsilon c\mu + bz, \quad y = \varepsilon c\lambda + az.$$

Wenn a prim zu b, und wenn es s Zahlen giebt, welche kleiner als b und prim zu b sind, so ist $a^s - 1$ durch b theilbar (Allg. Arithm. §. 13, 21). Nun ist identisch

$$aa^{s-1} - b\frac{a^s - 1}{b} = 1$$

$$aca^{s-1} - bc\frac{a^s - 1}{b} = c,$$

folglich $ax - by = c$, wenn überhaupt

$$x = ca^{s-1} + bz, \quad y = c\frac{a^s - 1}{b} + az.$$

5. Das System von Gleichungen

$$au = b + cx$$
$$a_1 u = b_1 + c_1 y$$
$$a_2 u = b_2 + c_2 z$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ist in ganzen Zahlen nur dann auflösbar, wenn a und c, a_1 und c_1, a_2 und c_2, . . prim zu einander sind. Wenn die Zahl u dem gegebenen System genügt, und wenn d den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus der Zahlen $c, c_1, c_2, \ldots$ bedeutet, und v eine willkürliche Zahl, so genügt auch $u + dv$ demselben System. Denn nach der Voraussetzung ist $au - b$ durch c theilbar, $a_1 u - b_1$ durch c_1 theilbar, u. s. w. Also ist auch $au + adv - b$ durch c theilbar, $a_1 u_1 + a_1 dv - b_1$ durch c_1 theilbar, u. s. w.

Aus der ersten Gleichung findet man $v = \alpha + cp$. Durch diese Substitution erhält man die zweite Gleichung

$$ca_1 p = b_1 - \alpha a_1 + c_1 y$$

$$p = \beta + \frac{c_1}{\delta_1} q, \qquad u = \alpha_1 + c\frac{c_1}{\delta_1} q$$

---

*) Die Auflösung der Gleichung $ax \pm by = c$ in ganzen Zahlen, die elementarste unter den Diophantischen Aufgaben, ist in den übrig gebliebenen Schriften Diophants nicht anzutreffen, sondern im Occident zuerst von Bachet (problêmes plaisans 1624) gegeben worden. Mit Bachet's Auflösung fällt in der Hauptsache Euler's Auflösung zusammen (Comm. Petrop. 7 p. 46), welche oben (3) mitgetheilt ist und die Vorzüge der Einfachheit und Kürze in sich vereint. Die Darstellung der Auflösung durch Kettenbrüche (4) hat Lagrange (Mém. de Berlin 1767 p. 175) gelehrt. Vergl. die franz. Ausgabe von Euler's Algebra, Lyon 1795, und Gauß Disq. arithm. 27 ff. Die Anwendung des Fermat'schen Satzes ist von Binet erdacht (J. de l'école polyt. Cah. 20 p. 289).

wenn δ_1 der größte gemeinschaftliche Divisor von c und c_1 ist. Durch diese Substitution erhält man die dritte Gleichung

$$c\frac{c_1}{\delta_1}\alpha_2 q = b_2 - \alpha_1\alpha_2 + c_2 z$$

$$q = \beta_1 + \frac{c_2}{\delta_2} r, \qquad u = \alpha_2 + c\frac{c_1}{\delta_1}\frac{c_2}{\delta_2} r$$

wenn δ_2 der größte gemeinschaftliche Divisor von $c\frac{c_1}{\delta_1}$ und c_2 ist. U. s. w.

Beispiel 1. Die Zahl u soll so bestimmt werden, daß $121u$ nach dem Modul 504 den Rest 41, $9u$ nach dem Modul 35 den Rest -1, $27u$ nach dem Modul 16 den Rest 11 giebt.

Nun ist $504 = 8 . 9 . 7$, $35 = 7 . 5$; also soll $121u - 41$ durch 8, 9, 7, ferner $9u + 1$ durch 7, 5, endlich $27u - 11$ durch 16 theilbar sein. Diese Forderungen reduciren sich auf folgende:

$u - 1$ soll durch 8, $u + 1$ durch 9, $2u + 1$ durch 7 theilbar sein;
$2u + 1$ soll durch 7, $u - 1$ durch 5 theilbar sein;
$u - 1$ soll durch 16 theilbar sein.

Da nun u der Aufgabe genügt, wenn $u - 1$ durch 80, $u + 1$ durch 9, $2u + 1$ durch 7 theilbar ist, so setze man

$$u = 1 + 80x$$
$$u = -1 + 9y$$
$$2u = -1 + 7z.$$

Die erste dieser Gleichungen braucht nicht erst aufgelöst zu werden, und man hat sogleich

$$9y = 2 + 80x, \quad y = 9x - \frac{x-2}{9}$$

$$x = 2 + 9p, \quad u = 161 + 720p.$$

Diese Substitution giebt

$$7z = 323 + 1440p, \qquad z = \ldots - \frac{2p-1}{7}$$

$$2p = 1 + 7q, \qquad p = 3q + \frac{q+1}{2}$$

$$q = -1 + 2r.$$

Wenn $r = 0$, so ist $q = -1$, $p = -3$, $u = -1999$; also überhaupt $u = -1999 + 5040p$.

Beispiel 2. Damit die Zahl u nach dem Modul 9 den Rest 5 oder -4, nach dem Modul 10 den Rest 9 oder -1 giebt, und durch 11 theilbar ist, setze man

$$u = -4 + 9x$$
$$u = -1 + 10x$$
$$u = 11z.$$

Demnach ist

$$9x = 3 + 10y, \quad x = y + \frac{y+3}{9}$$
$$y = -3 + 9p.$$

Wenn $p = 0$, so ist $y = -3$, $u = -31$; also überhaupt

$$u = -31 + 90p.$$

Diese Substitution giebt

$$11z = -31 + 90p, \quad z = \ldots + 2\frac{p+1}{11}$$
$$p = -1 + 11q.$$

Wenn $q = 0$, so ist $p = -1$, $u = -121$, also überhaupt

$$u = -121 + 990q.$$

6. Um ein System von m linearen Gleichungen mit $m + 1$ Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen, hat man nach Elimination von $m - 1$ Unbekannten eine Gleichung mit 2 Unbekannten abzuleiten. Die durch Auflösung dieser Gleichung gefundenen Werthe der beiden Unbekannten werden in eine der abgeleiteten Gleichungen substituirt, welche außer jenen beiden Unbekannten eine andere Unbekannte enthält. Die durch Auflösung dieser Gleichung gefundenen Werthe der drei Unbekannten werden wiederum substituirt. U. s. w.

Beispiel 1. Aus den Gleichungen

$$3x + 5y + 7z = 560$$
$$9x + 25y + 49z = 2920$$

ergiebt sich durch Elimination von z

$$5y = 500 - 6x, \quad y = 100 - x - \frac{x}{5}$$
$$x = 5p, \quad y = 100 - 6p.$$

Durch diese Substitution erhält man aus der ersten gegebenen Gleichung

$$7z = 15(4 + p), \quad z = 15\frac{p+4}{7}$$
$$p = -4 + 7q,$$

folglich genügen dem gegebenen System

$$x = -20 + 35q, \quad y = 124 - 42q, \quad z = 15q$$

mit positiven Werthen, wenn $q = 1, 2$.

Beispiel 2. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 4u + 13x + 5y - 2z &= 2559 \\ -5u + 8x + 7y + 3z &= 1595 \\ -7u + 11x - 3y + 5z &= 2157 \end{aligned}$$

findet man die abgeleiteten Gleichungen

$$\begin{aligned} 97x + 53y + 2z &= 19175 \\ 135x + 23y + 6z &= 26541 \\ \hline 39x + 34y &= 7746 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung giebt durch die Substitution $x = 2p$, $y = 3q$

$$13p = 1291 - 17q, \quad p = 99 - q - 4\frac{q-1}{13}$$

$$q = 1 + 13r.$$

Bei $r = 0$ ist $q = 1$, $p = 98$, also überhaupt

$$x = 196 - 34r, \quad y = 3 + 39r.$$

Durch diese Substitution erhält man aus der ersten abgeleiteten Gleichung

$$2z = 4 + 1231r, \quad r = 2s,$$

folglich

$$x = 196 - 68s, \quad y = 3 + 78s, \quad z = 2 + 1231s.$$

Durch diese Sustitution giebt die erste gegebene Gleichung

$$4u - 2956s = 0, \quad u = 739s.$$

Das gegebene System hat positive Auflösungen bei $s = 1, 2$.

7. Eine lineare Gleichung mit m Unbekannten ist in ganzen Zahlen auflösbar, wenn die Coefficienten der Unbekannten prim zu einander sind. Die Werthe der Unbekannten werden mit Hülfe von $m - 1$ Unbestimmten dargestellt.

Beispiel 1. $5x + 7y + 8z = 50$.

$$5x = 50 - 7y - 8z, \quad x = 10 - y - z - \frac{2y + 3z}{5}$$

$$2y = -3z + 5p, \quad y = -z + 2p - \frac{z - p}{2}$$

$$z = p + 2q, \quad y = p - 3q, \quad x = 10 - 3p + q.$$

Wenn x, y, z positiv sind, so sind $x + 3z = 10 + 7q$ und $x + 3y = 10 - 8q$ positiv, q liegt zwischen $-\frac{10}{7}$ und $+\frac{10}{8}$ und hat die Werthe $-1, 0, 1$. Bei $q = 1$, $p > 3$ wird x negativ. Also findet man positive Auflösungen der gegebenen Gleichung bei

$$q = -1, p = 0$$

$$q = 0, \quad p = 1, 2, 3.$$

Beispiel 2. $15x + 6y + 20z = 171$.

$$6y = 171 - 15x - 10z,\quad y = 28 - 2x - 3z - \frac{3x + 2z - 3}{6}$$

$$2z = 3 - 3x + 6p,\qquad z = 3\left(p - \frac{x-1}{2}\right)$$

$$x = 1 + 2q,\quad z = 3p - 3q,\quad y = 26 + 5q - 10p.$$

Die gegebene Gleichung hat positive Auflösungen, wenn $x = 1 + 2q$ und $y + \frac{10}{3}z = 26 - 5q$ positiv sind, also q zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{26}{5}$ liegt und die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5 hat. Bei $q > 3$ wird z oder y negativ. Also findet man positive Auflösungen bei

q	0	0	1	1	2	3
p	1	2	2	3	3	4

8. Um die y in erster Potenz enthaltende Gleichung

$$y(ax + b) = cx^2 + dx + e$$

in ganzen Zahlen aufzulösen, entwickelt man

$$a^2y = \frac{a^2cx^2 + a^2dx + a^2e}{ax + b} = acx + ad - bc + \frac{a^2e + b^2c - abd}{ax + b}$$

so daß

$$(a^2y - acx - ad + bc)(ax + b) = a^2e + b^2c - abd.$$

Ist nun $a^2e + b^2c - abd$ durch Zahlen der Form $ax + b$ theilbar, so ist sie auch durch Zahlen der Form $a^2y - acx - ad + bc$ theilbar. Man hat demnach unter den Divisoren von $a^2e + b^2c - abd$ diejenigen auszusuchen, welche die Form $ax + b$ haben, oder unter den Zahlen der Form $ax + b$ diejenigen, welche in $a^2e + b^2c - abd$ aufgehn.

Beispiel 1. $y = \frac{-x^2 + 2x + 29}{x - 3}$.

Man findet nach der Division $(y + x + 1)(x - 3) = 26$, folglich

$x - 3$	1	2	13	16	-1	-2	-13	-26
$y + x + 1$	26	13	2	1	-26	-13	-2	-1
x	4	5	16	29	2	1	-10	-23
y	21	7	-15	-29	-29	-15	7	21

Beispiel 2. $y = \frac{2x + 18}{5x - 3}$

giebt $(5y - 2)(5x - 3) = 96$, folglich

$5x - 3$	2	12	32	-3	-8	-48
$5y - 2$	48	8	3	-32	-12	-2

x	1	3	7	0	-1	-9
y	10	2	1	-6	-2	0

Beispiel 3. $y = \dfrac{3x^2 + 1}{2x + 1}$

giebt $(4y - 6x + 3)(2x + 1) = 7$, folglich

$2x + 1$	1	7	-1	-7
$4y - 6x + 3$	7	1	-7	-1

x	0	3	-1	-4
y	1	4	-4	-7

6. Um die Gleichung*) $x^2 + y^2 = z^2$ in ganzen Zahlen aufzulösen, setze man

$$t^2 + u^2 = (t + v)^2,$$

wodurch man

$$t = \frac{u^2 - v^2}{2v}, \quad t + v = \frac{u^2 + v^2}{2v}$$

findet. Demnach sind bei rationalen u und v

$$\frac{u^2 - v^2}{2v}, \quad u, \quad \frac{u^2 + v^2}{2v}$$

rationale Werthe von x, y, z, welche der gegebenen Gleichung genügen. Diese Werthe genügen der gegebenen Gleichung auch dann, wenn man sie mit $2v$ multiplicirt hat; also sind bei ganzen u und v

$$u^2 - v^2, \quad 2uv, \quad u^2 + v^2$$

ganze Zahlen, welche der gegebenen Gleichung genügen.

Haben u und v den gemeinschaftlichen Divisor m, so haben $u^2 - v^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$ den gemeinschaftlichen Divisor m^2.

Sind u und v ungerade, so sind u^2 und v^2 ungerade, $u^2 + v^2$ gerade und $u^2 - v^2$ durch 8 theilbar, folglich die Werthe von x, y, z durch 2 theilbar.

Um also Werthe von x, y, z zu erhalten, welche einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, wählt man für u und v Werthe, welche prim zu einander und nicht beide ungerade sind; z. B.

v	1	1	1	..	2	2	2	..	3	3	3	..
u	2	4	6	..	3	5	7	..	4	8	10	..

*) Die Pythagoreische Gleichung, deren Auflösung Eucl. X, 29. Lemma 1 angegeben ist. Daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar sei, daß also die Summe von zwei $n$ten Potenzen eine $n$te Potenz nicht sein könne, hat Fermat bemerkt (Observ. ad Dioph. Arithm. II, 8). Ein allgemeiner Beweis dieser Bemerkung ist zur Zeit nicht bekannt.

x	3	15	35	..	5	21	45	..	7	55	91	..
y	4	8	12	..	12	20	28	..	24	48	60	..
z	5	17	37	..	13	29	53	..	25	73	109	..

Wie man auch u und v wählen mag, so ist eine der Zahlen x, y durch 3, eine derselben durch 4, ferner eine der Zahlen x, y, z durch 5 theilbar, mithin das Product xyz durch 60 theilbar*).

Beweis. Nach dem Modul 3 congruiren die Zahlen mit einer der Zahlen 0, ± 1, und die Quadrate mit 0, 1. Ist nun weder u noch v durch 3 theilbar, so ist $u^2 - v^2$ durch 3 theilbar.

Wenn u oder v gerade ist, so ist $2uv$ durch 4 theilbar. Wenn u und v beide ungerade sind, so sind x, y, z durch 2 theilbar, und $\frac{1}{2}x$ durch 4 theilbar.

Nach dem Modul 5 congruiren die Zahlen mit einer der Zahlen 0, ± 1, ± 2, und die Quadrate mit 0, 1, -1. Ist nun weder u noch v durch 5 theilbar, so ist entweder $u^2 - v^2$ oder $u^2 + v^2$ durch 5 theilbar.

10. Die Formel $a + bx + cx^2$ kann bei rationalen Werthen von x nicht unbedingt ein Quadrat werden**). Wenn aber insbesondere a oder c ein Quadrat ist, oder wenn die Formel als ein Product pq, oder als ein Binomium $p^2 + qr$ darstellbar ist, wobei p, q, r Functionen von x ersten Grades bedeuten, so findet man geeignete rationale Werthe von x auf folgendem Wege.

Wenn $a = \alpha^2$, so setze man $\alpha^2 + bx + cx^2 = (\alpha + ux)^2$, folglich

$$x = \frac{2\alpha u - b}{c - u^2},\quad \alpha + ux = \frac{\alpha(c + u^2) - bu}{c - u^2}.$$

Wenn $c = \gamma^2$, so setze man $a + bx + \gamma^2 x^2 = (u + \gamma x)^2$, folglich

$$x = \frac{a - u^2}{2\gamma u - b},\quad u + \gamma x = \frac{\gamma(a + u^2) - bu}{2\gamma u - b}.$$

Wenn $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist, so kann $a + bx + cx^2$ als Differenz von 2 Quadraten, mithin das Product von 2 Functionen von x ersten Grades dargestellt werden. Setzt man nun

$$(f + gx)(m + nx) = u^2(f + gx)^2$$

so wird

---

*) Frénicle sur les triangles rectangles en nombres 1676 prop. 26—30 (Anc. Mém. de Paris t. V). Gerg. Ann. 20 p. 212. Crelle J. 5 p. 386.

**) Vergl. Euler Introd. I §. 50 und Algebra II, 2.

$$x = \frac{fu^2 - m}{n - gu^2}, \quad u(f + gx) = \frac{(fn - gm)u}{n - gu^2}.$$

Wenn $a + bx + cx^2 = p^2 + qr$, worin p, q, r Functionen von x ersten Grades bedeuten, so setze man

$$p^2 + qr = (p + qu)^2,$$

und berechne x aus der Gleichung ersten Grades

$$r = 2pu + qu^2.$$

11. Die transscendente Gleichung $x^y = y^x$ kann nach Euler (Introd. II. §. 519) dadurch reducirt werden, daß man $y = ux$ setzt. Durch diese Substitution erhält man die Gleichung $(x^u)^x = (ux)^x$, welche in realen Zahlen $x^u = ux$, $x^{u-1} = u$ giebt. Folglich genügen

$$x = u^{\frac{1}{u-1}}, \quad y = uu^{\frac{1}{u-1}}$$

der gegebenen Gleichung. Um dieselbe in rationalen Zahlen aufzulösen, setzt man $u - 1 = \frac{1}{v}$, und erhält

$$x = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v, \quad y = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1}.$$

v	1	2	3	...
x	2	$(\frac{3}{2})^2$	$(\frac{4}{3})^3$	...
y	4	$(\frac{3}{2})^3$	$(\frac{4}{3})^4$	...

§. 10. Lehrsätze von den algebraischen Functionen.

1. Wenn $f(x)$ eine ganze Function $n$ten Grades und t eine beliebige Zahl bedeutet, so ist die Differenz $f(x) - f(t)$ durch die Differenz $x - t$ theilbar. Der Quotient ist eine ganze Function $(n-1)$-ten Grades*).

Beweis. Aus den Werthen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

findet man durch Subtraction

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = a_n \frac{x^n - t^n}{x - t} + a_{n-1} \frac{x^{n-1} - t^{n-1}}{x - t} + \ldots$$

---

*) Diese Erweiterung des Satzes von der Theilbarkeit der Differenz $x^k - t^k$ durch $x - t$ kommt im Anfang des 17ten Jahrh. vor. Descartes Géom. III.

Nun ist $x^k - t^k$ durch $x - t$ theilbar (Allg. Arithm. §. 12, 5), folglich u. s. w. Der Quotient

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = a_n x^{n-1} + \begin{array}{l|l|l} a_n t & x^{n-2} + a_n t^2 & x^{n-3} + \,.\,. \\ + a_{n-1} & \quad + a_{n-1} t & \quad + \,.\,. \\ & \quad + a_{n-2} & \quad + \,.\,. \\ & & \quad + \,.\,. \end{array}$$

ist eine symmetrische ganze Function von x und t (§. 2, 11), und wird entweder nach steigenden Potenzen von t geordnet

$$\begin{aligned} & a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \,.\,. + a_2 x + a_1 \\ & + (a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \,.\,. + a_3 x + a_2) t \\ & + (a_n x^{n-3} + a_{n-1} x^{n-4} + \,.\,. + a_4 x + a_3) t^2 \\ & + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \end{aligned}$$

oder nach fallenden Potenzen von x

$$b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \,.\,. + b_1 x + b_0$$

wobei

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1} t \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + b_{n-2} t \end{aligned}$$

u. s. w. gesetzt ist.

Beispiele. Wenn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, so hat man

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = ax^3 + bx^2 + cx + d + (ax^2 + bx + c)t + (ax + b)t^2 + at^3.$$

Wenn $f(x) = 6x^6 - 19x^5 + 13x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 16$, so ist $f(x) - f(4)$ durch $x - 4$ theilbar. Der Quotient wird, weil $b_5 = 6$, $b_4 = -19 + 6.4$ u. s. w., nach folgendem Schema berechnet:

6	— 19	13	— 20	48	0	— 16
	24	20	132	448	1984	7936
6	5	33	112	496	1984	7920

$$\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 6x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 112x^2 + 496x + 1984.$$

Indem man $x = 0$ setzt, findet man noch $f(4) = -16 + 1984.4$, und demnach

$$\frac{f(x)}{x - 4} = 6x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 112x^2 + 496x + 1984 + \frac{7920}{x - 4}.$$

2. Wenn die Function $n$ten Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

bei den n Werthen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von x verschwindet, wenn demnach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ für die Unbekannte x sind, so ist $f(x)$ durch das Product der n Differenzen $(x - \alpha_1) \times (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$ theilbar, und der Quotient ist der höchste Coefficient a_n der Function $f(x)$.

Beweis. Die Differenz $f(x) - f(\alpha_1)$, deren Subtrahendus nach der Voraussetzung verschwindet, ist durch $x - \alpha_1$ theilbar (1). Bezeichnet man den Quotienten durch $f_1(x)$, so hat man

$$f(x) = (x - \alpha_1)\, f_1(x).$$

Bei $x = \alpha_2$ verschwindet $f(x)$, also auch $\dfrac{f(x)}{x - \alpha_1}$ d. i. $f_1(x)$, und man hat $f_1(x) = (x - \alpha_2) f_2(x)$, folglich

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) f_2(x)$$

u. s. w. Wenn man endlich

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) C$$

gefunden hat, so folgt aus der Identität

$$a_n x^n + \ldots + a_0 - (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) C = 0$$

daß C von a_n nicht verschieden ist (§. 4, 1).

Anmerkung. Wenn die Coefficienten $a_n, a_{n-1}, \ldots$ real, und die Größen t, u conjugirt complex sind, so sind auch die Werthe $f(t)$ und $f(u)$ conjugirt complex. Wenn nun $f(t)$ verschwindet, so verschwindet auch $f(u)$, und die Norm von $x - t$ (Allg. Arithm. §. 16, 7) ist ein Divisor zweiten Grades von $f(x)$.

3. Wenn die Function $n$ten Grades $f(x)$ die n Divisoren ersten Grades $x - \alpha_1, \ldots x - \alpha_n$ hat, so kann sie nicht bei einem von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ verschiedenen Werth α von x verschwinden, also auch nicht einen andern Divisor ersten Grades $x - \alpha$ haben. Denn das Product $a_n(\alpha - \alpha_1) \ldots (\alpha - \alpha_n)$ verschwindet nur dann, wenn einer seiner Factoren verschwindet. Setzt man wie oben (2)

$$f(x) = a_0(1 + \beta_1 x)(1 + \beta_2 x) \ldots (1 + \beta_n x)$$

so sind $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ den Reciproken der Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der Reihe nach entgegengesetzt gleich.

Wenn die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nicht alle von einander verschieden sind, und man z. B.

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^r (x - \alpha_2)^s \ldots (x - \alpha_{k+1}) \ldots (x - \alpha_n)$$

gefunden hat, so kann nicht auch

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^\varrho (x - \alpha_2)^\sigma \ldots (x - \alpha_{k+1}) \ldots (x - \alpha_n)$$

sein, so daß $\varrho < r$, $\sigma > s$ wäre; sonst würde

$$\frac{f(x)}{a_n(x - \alpha_1)^\varrho} = (x - \alpha_1)^{r-\varrho}(x - \alpha_2)^s \ldots$$

bei $x = \alpha_1$ verschwinden, während $(\alpha_1 - \alpha_2)^\sigma \ldots (\alpha_1 - \alpha_{k+1}) \ldots (\alpha_1 - \alpha_n)$ nicht verschwindet.

Beispiele. Die Function $x^n - 1$ verschwindet bei $x = e^{i\frac{m\pi}{n}}$ nach Allg. Arithm. §. 31, 8, wenn m eine gerade Zahl ist. Dieser Werth ist $n$deutig, also hat die gegebene Function n verschiedene Divisoren ersten Grades, die aus $x - e^{i\frac{m\pi}{n}}$ entspringen, wenn man 0, $\pm$ 2, $\pm$ 4, . . für m setzt. Nun ist

$$\left(x - e^{i\frac{m\pi}{n}}\right)\left(x = e^{-i\frac{m\pi}{n}}\right) = x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1,$$

folglich hat die gegebene Function Divisoren zweiten Grades, die aus $x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$ entspringen, wenn man 2, 4, 6, . . für m setzt. Zu diesen Divisoren kommt der Divisor ersten Grades $x - 1$ für $m = 0$, und bei gerадem n der Divisor ersten Grades $x + 1$ für $m = n$.

Die Function $x^n + 1$ verschwindet bei $x = e^{i\frac{m\pi}{n}}$, wenn m eine ungerade Zahl ist. Ihre Divisoren zweiten Grades entspringen aus $x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$, wenn man 1, 3, 5, . . für m setzt. Zu diesen kommt bei ungeradem n der Divisor $x + 1$ für $m = n$.

Die Function $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$ hat die Divisoren $x^n - e^{i\alpha}$ und $x^n - e^{-i\alpha}$. Nun ist $x^n - e^{i\alpha}$ durch $x - e^{i\frac{\alpha+m\pi}{n}}$ theilbar, und $x - e^{-i\alpha}$ durch $x - e^{-i\frac{\alpha+m\pi}{n}}$ theilbar, wenn m eine gerade Zahl bedeutet. Die n verschiedenen Divisoren zweiten Grades der gegebenen Function entspringen aus $x^2 - 2x\cos\frac{\alpha + m\pi}{n} + 1$, wenn man 0, 2, 4, . . für m setzt.

Die Formel $x^2 - 2x\cos y\pi + 1$ bedeutet das Quadrat der Seite eines Dreiecks, in welchem die beiden andern Seiten die Längen 1 und x haben und den Winkel einschließen, der zu 180^0 das Verhältniß y hat. Daher können die quadratischen Divisoren der Functionen

$$x^n - 1, \quad x^n + 1, \quad x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$$

construirt werden, und sie sind in der That zuerst geometrisch vor der Einführung der Potenzen mit imaginären Exponenten dargestellt worden, die Divisoren von $x^n - 1$ und von $x^n + 1$ durch Cotes (Harmonia mensurarum p. 114, Op. posth. 1722), die Divisoren von $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$ bald darauf durch Moivre (Misc. anal. p. 22).

4. Aus der Identität (2)

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)\,.\,.\,(x - \alpha_n) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \,.\,.$$

erkennt man, daß die Einheit und die Summen der Producte von je 1, 2, 3, . . unter den mit den entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Coefficienten a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, . . der Function*).

Beweis. Das Product $(x - \alpha_1)\,.\,.\,(x - \alpha_n)$ giebt

$$x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \,.\,.\, + C_n$$

wenn durch C_k die Summe der Producte von je k unter den Größen $-\alpha_1, -\alpha_2$, . . bezeichnet wird (Allg. Arithm. §. 27, 1). Also hat man $a_n C_k = a_{n-k}$, mithin

$$1 : C_1 : C_2 : \,.\,.\, = a_n : a_{n-1} : a_{n-2} : \,.\,.\,.$$

Beispiel. Bezeichnet man eine eigentliche $n$te Wurzel von 1 durch ϱ, so sind $\varrho^2, \varrho^3, \ldots \varrho^n$ die übrigen $n$ten Wurzeln von 1 (Allg. Arithm. §. 18, 9). Daher hat man

$$x^n - 1 = (x - \varrho)(x - \varrho^2)\,.\,.\,(x - \varrho^n)$$

$$\varrho + \varrho^2 + \,.\,.\, + \varrho^n = 0, \qquad (-1)^n \varrho\varrho^2\,.\,.\,\varrho^n = -1.$$

Die Summe der $n$ten Wurzeln von 1 ist 0, ihr Product $(-1)^{n-1}$.

Die durch die Coefficienten a_n, a_{n-1}, . . rational ausdrückbaren Größen C_1, C_2, . . sind symmetrische Functionen der Größen $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, . . (§. 2, 11). Man hat bemerkt, daß jede symmetrische ganze Function derselben Größen durch jene Coefficienten rational ausgedrückt werden kann; insbesondere wurde die Summe ihrer $k$ten Potenzen recursiv angegeben von Newton Arith. univ. p. 192 ed. Lugd. Vergl. Euler Opusc. var. arg. II p. 108, Mém. de Berlin 1748 p. 234, und anderwärts. Independente Ausdrücke für die Summe der 2ten, 3ten, 4ten Potenzen kommen früher vor bei Girard 1629 (Klügel math. W. I p. 56).

5. Wenn die Function $n$ten Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \,.\,.\, + a_1 x + a_0$$

bei mehr als n Werthen von x verschwindet, so verschwindet sie identisch d. h. bei allen Werthen von x, und die Coefficienten sind Nullen**).

Beweis. Wenn $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ verschwinden, so hat man die Identität (2) $f(x) = a_n(x - \alpha_1)\,.\,.\,(x - \alpha_n)$. Wenn zugleich $f(\alpha_{n+1})$ verschwindet, so verschwindet das Product $a_n(\alpha_{n+1} - \alpha_1)\,.\,.\,(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$, also muß $a_n = 0$ sein. Demnach verschwindet die Function $(n-1)$ten Grades $a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \,.\,.$ bei mehr als $n - 1$ Werthen von x, folglich ist $a_{n-1} = 0$, u. s. w.

---

*) Dieser Satz ist in den einfachsten Fällen von Cardano, umfassender von Vieta am Ende der Schrift de emendatione aequationum angemerkt worden.

**) Vergl. Cauchy Anal. algébr. c. IV, 1.

Beispiel. Nach Allg. Arithm. §. 25, 5 ist bei ganzen positiven Werthen von k, u, v

$$\binom{u+v}{k} = \binom{u}{k} + \binom{u}{k-1}\binom{v}{1} + \cdot\cdot + \binom{u}{1}\binom{v}{k-1} + \binom{v}{k}.$$

Nun ist $\binom{u+v}{k} - \binom{u}{k} - \binom{u}{k-1}\binom{v}{1} + \cdot\cdot - \binom{v}{k}$ eine Function $k$ten Grades von u, welche bei allen ganzen positiven u und v verschwindet. Folglich verschwindet diese Function identisch d. h. bei ganzen positiven Werthen von k und beliebigen Werthen von u und v. Man kann diese Identität auch inductiv durch den Schluß von k auf $k+1$ beweisen.

6. Wenn die ganzen Functionen $g(x)$ und $h(x)$ ganze Coefficienten haben, und wenn alle Coefficienten des Products $g(x)h(x)$ durch die Primzahl p theilbar sind, so sind entweder alle Coefficienten von $g(x)$ oder alle Coefficienten von $h(x)$ durch p theilbar. Es sei z. B. $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdot\cdot$, $h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ Wenn nun p in $b_0, b_1, \ldots, b_{i-1}$ aufgeht, aber nicht in b_i, wenn ferner p in $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ aufgeht, aber nicht in c_k, so geht p in dem Coefficienten, welchen x^{i+k} in dem Product $g(x)\,h(x)$ hat,

$$\cdot\cdot + b_{i-1}c_{k+1} + b_i c_k + b_{i+1}c_{k-1} + \cdot\cdot$$

nicht auf. Dieß ist gegen die Voraussetzung, also sind entweder alle Coefficienten b oder alle Coefficienten c durch p theilbar.

Wenn die ganze Function $f(x)$, deren Coefficienten ganz und prim zu einander sind, durch die ganze Function $g(x)$ derselben Art theilbar ist, so ist auch der Quotient von derselben Art*). Hätte der Quotient gebrochene Coefficienten, so würde er durch Multiplication mit einer bestimmten kleinsten ganzen Zahl q zu einer ganzen Function $h(x)$ mit ganzen Coefficienten gemacht werden. Da nun $g(x)h(x) = qf(x)$ ist, so geht jede Primzahl, durch welche q theilbar ist, entweder in allen Coefficienten von $g(x)$ auf, oder in allen Coefficienten von $h(x)$. Beides widerstreitet der Voraussetzung, also kann der Quotient gebrochene Coefficienten nicht haben.

Die Function $f(x)$ der angegebenen Art kann durch die Function $g(x)$ derselben Art nicht theilbar sein, wenn der höchste Coefficient von $f(x)$ durch den höchsten Coefficienten von $g(x)$ nicht theilbar ist. Wenn aber $f(x)$ durch $g(x)$ theilbar ist, und wenn der höchste Coefficient von

---

*) Gauß Disquis. arithm. 42. Eisenstein Crelle's J. 39 p. 168. Der Beweis ist nach Kronecker's Angabe geführt worden.

$f(x)$ eine Einheit ist, so muß auch der höchste Coefficient von $g(x)$ eine Einheit sein; also sind die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ entweder ganz oder irrational. Vergl. Allg. Arithm. §. 18, 7. Und wenn der höchste Coefficient a_n von $f(x)$ nicht 1 ist, so erhält man durch die Substitution $x = y : a_n$ für $a_n^{n-1}f(x)$ eine ganze Function von y mit ganzen Coefficienten, deren höchster 1 ist (§. 7, 1).

7. Wenn die Function mit ganzen Coefficienten

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

durch die Function ersten Grades mit ganzen Coefficienten $x + b_0$ theilbar ist und den Quotienten $x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1 x + c_0$ giebt, so hat man identisch

$$f(x) = \begin{array}{l|l|l|l} x^n + c_{n-2} & x^{n-1} + c_{n-3} & x^{n-2} + \ldots + c_0 & x \\ \quad\; + b_0 & \quad\;\; + b_0 c_{n-2} & \quad\quad\quad\;\; + b_0 c_1 & + b_0 c_0 \end{array}$$

folglich $a_0 = b_0 c_0$, $a_1 = c_0 + b_0 c_1$, ... Also kann $x + b_0$ ein ganzzahliger Divisor von $f(x)$ nicht sein, wenn eine der successiven Divisionen

$$\frac{a_0}{b_0} = c_0, \quad \frac{a_1 - c_0}{b_0} = c_1, \ldots, \quad \frac{a_{n-2} - c_{n-3}}{b_0} = c_{n-2}$$

nicht aufgeht (Bezout's Regel, Élém. d'algèbre).

Wenn $f(x)$ den ganzzahligen Divisor $x + b_0$ hat, so sind .., $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, .. durch .., $1 + b_0$, b_0, $-1 + b_0$, .. theilbar. Und wenn eine dieser Divisionen nicht aufgeht, so kann $f(x)$ durch $x + b_0$ nicht theilbar sein.

Wenn $f(x)$ den ganzzahligen Divisor 2ten Grades $x^2 + b_1 x + b_0$ hat, so sind .., $f(2)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$, .. der Reihe nach durch die arithmetische Progression 2ter Ordnung

$$\ldots, 4 + 2b_1 + b_0, \; 1 + b_1 + b_0, \; b_0, \; 1 - b_1 + b_0, \; 4 - 2b_1 + b_0, \ldots$$

theilbar. Daher stelle man die um 4 verminderten Divisoren von $f(2)$, die um 1 verminderten Divisoren von $f(1)$, die Divisoren von $f(0)$, die um 1 verminderten Divisoren von $f(-1)$, .. je in eine Zeile: es muß eine arithmetische Progression 1ter Ordnung geben, deren Glieder den folgenden Zeilen angehören, sonst könnte $f(x)$ einen ganzzahligen Divisor 2ten Grades nicht haben (Newton's Regel, Arithm. univ. p. 37 ed. Lugd.).

Wenn $f(x, y)$ eine homogene ganze Function mit ganzen Coefficienten ist, und wenn z. B. $x^2 + b_1 x + b_0$ in $f(x, 1)$ aufgeht, so geht $x^2 + b_1 xy + b_0 y^2$ in $f(x, y)$ auf. Wenn die homogene ganze Function $f(x, y, z)$ mit ganzen Coefficienten durch die Function derselben Art $g(x, y, z)$ theilbar ist, so sind $g(0, y, z)$, $g(x, 0, z)$, $g(x, y, 0)$ Divisoren von $f(0, y, z)$, $f(x, 0, z)$, $f(x, y, 0)$. Aus den Divisoren dieser letztern Functionen kann man die möglichen Formen von $g(x, y, z)$ erkennen. Newton a. a. O. Clairaut Élém. d'algèbre III.

Wenn aber eine ganze Function mit ganzen Coefficienten durch eine Function derselben Art nicht theilbar ist, so heißt sie irreducibel. Vergl. Abel Crelle's J. 4 p. 132.

8. In der nach steigenden Potenzen von z geordneten Reihe von realen Gliedern

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

wird bei hinreichend kleinen Werthen von z jedes Glied größer als die Summe der folgenden Glieder. Das Zeichen der Reihe stimmt dann mit dem Zeichen des ersten nicht verschwindenden Gliedes überein.

Beweis. Wenn zunächst alle Glieder positiv sind und wenn q eine Grenze ist, welche keiner der Quotienten

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}, \quad \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}}, \ldots$$

übersteigt, so ist

$$\begin{aligned} a_{k+1} &< a_k q \\ a_{k+2} &< a_{k+1} q < a_k q^2 \\ a_{k+3} &< a_{k+2} q < a_k q^3 \end{aligned}$$

u. s. w., folglich

$$a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + a_{k+2} z^{k+2} + \ldots < a_k z^k (1 + qz + q^2 z^2 + \ldots).$$

Nimmt man nun $z < 1 : 2q$, so wird $qz < \frac{1}{2}$ und

$$1 + qz + q^2 z^2 + \ldots \leqq \frac{1}{1 - qz} < 2$$

also

$$a_{k+1} z^{k+1} + a_{k+2} z^{k+2} + \ldots < a_k z^k.$$

Wenn unter den Gliedern der Reihe einige verschwinden oder negativ sind, so gilt der bewiesene Satz schon bei minder kleinen Werthen von z.

9. Wenn $f(x)$ eine Function $n$ten Grades ist, so giebt es n (im Allgemeinen complexe) Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von x, bei denen die Function verschwindet, d. h. die Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$ hat n Wurzeln, die bei besondern Werthen der Coefficienten nicht alle von einander verschieden sind*).

---

*) Dieser Fundamentalsatz der algebraischen Analysis, welchen man früher aus besonderen Fällen erkannt hatte, ist von D'Alembert, Euler, Lagrange zu beweisen versucht worden. Mém. de Berlin 1746 p. 182, 1749 p. 223, 1772 p. 222. Den ersten strengen Beweis nebst einer umfassenden Critik der frühern Beweise hat Gauß gegeben: Demonstratio nova theorematis, omnem functionem etc. Helmstädt 1799. Derselbe hat zwei andere Beweise 1814 und 1815 im 3ten Bande der Göttinger Commentarien, und eine neue Bearbeitung des zuerst erwähnten Beweises 1849 im 4ten Bande der Gött. Abhandlungen mitgetheilt. Legendre's Beweis (Théorie des nombres §. 119), der auf der Verminderung von $f(x)$ beruht, ist in der hier gegebenen Weise von Cauchy (Anal. algébr. c. X) und Sturm (Choquet et Mayer Algèbre §. 378) bearbeitet worden.

Beweis. Die Norm von $f(x)$ kann, so lange sie nicht verschwindet, durch Veränderung von x vermindert werden; daher kann sie bis auf die Grenze 0 gebracht werden, so daß $f(x)$ verschwindet. Man erhält nämlich durch Entwickelung nach steigenden Potenzen der Veränderung $p + iq$ (Allg. Arithm. §. 23)

$$f(a + ib + p + iq) = f(a + ib) + f_k(a + ib)(p + iq)^k + \ldots$$

wenn man durch $f_k(a + ib)$ den ersten nicht verschwindenden Coefficienten bezeichnet. Die Norm dieser Complexen ist

$$f(a+ib+p+iq)f(a-ib+p-iq) = f(a+ib)f(a-ib)$$
$$+ f(a-ib)f_k(a+ib)(p+iq)^k + f(a+ib)f_k(a-ib)(p+iq)_k - \ldots$$

Setzt man (Allg. Arithm. §. 31, 9)

$$f(a + ib) = re^{i\varphi}, \quad f_k(a + ib) = se^{i\chi}, \quad p + iq = te^{i\psi},$$

so findet man für die Veränderung der Norm

$$f(a + ib + p + iq)f(a - ib + p - iq) - f(a + ib)f(a - ib)$$
$$= rst^k \left\{e^{i(-\varphi+\chi+k\psi)} + e^{-i(-\varphi+\chi+k\psi)}\right\} + \ldots$$
$$= 2rst^k \cos(- \varphi + \chi + k\psi) + \ldots$$

Bei hinreichend kleinen Werthen von t stimmt das Zeichen dieser Reihe mit dem Zeichen ihres ersten Gliedes (8). Man kann aber ψ innerhalb gegebener Grenzen so wählen, daß $\cos(- \varphi + \chi + k\psi)$ negativ wird, daß also die Norm von $f(a + ib)$ durch die Aenderung von $a + ib$ um $p + iq$ eine Verminderung erleidet.

Zu demselben Schlusse gelangt man, indem man die Veränderung $p + iq$ durch ϱt darstellt, wobei t eine beliebige positive Größe und ϱ eine Wurzel einer Einheit bedeutet. Die Entwickelung nach steigenden Potenzen von ϱt giebt

$$f(a + ib + \varrho t) = f(a + ib) + f_k(a + ib)\varrho^k t^k + \ldots$$
$$= A + iB + (C + iD)\varrho^k t^k + \ldots$$

Macht man $\varrho^k = \varepsilon$, welches entweder 1 oder -1 ist, so findet man

$$f(a + ib + \varrho t) = A + \varepsilon C t^k + \ldots + i(B + \varepsilon D t^k + \ldots).$$

Die Norm dieser Complexen

$$A^2 + B^2 + 2\varepsilon(AC + BD)t^k + \ldots$$

wird bei hinreichend kleinen Werthen von t und nach geeigneter Wahl von ϱ geringer als die Norm von $f(a + ib)$.

Nachdem ein Werth α_1 von x gefunden ist, so daß $f(\alpha_1)$ verschwin-

det, bildet man $f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x)$ und sucht einen Werth von x, bei welchem $f_1(x)$ verschwindet, u. s. w. (2).

10. Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind, so kann dem System

$$f(u + v) = 0, \quad f(u - v) = 0$$

nur durch die Werthe genügt werden

$$u + v = \alpha_r, \quad u - v = \alpha_s,$$

mithin durch die Werthe

$$2u = \alpha_r + \alpha_s, \quad 2v = \alpha_r - \alpha_s.$$

Dieselben Werthe genügen auch dem System

$$f(u + v) + f(u - v) = 0, \quad f(u + v) - f(u - v) = 0.$$

Setzt man die Summe $f(u + v) + f(u - v) = 2P$, und die durch v theilbare Differenz $f(u + v) - f(u - v) = 2vQ$, so genügen die angegebenen Werthe den beiden Systemen (§. 6, 9)

$$\left|\begin{matrix} P = 0 \\ v = 0 \end{matrix}\right| \text{ und } \left|\begin{matrix} P = 0 \\ Q = 0 \end{matrix}\right|$$

Dem ersten System wird dadurch genügt, daß man für u die Werthe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ setzt. Dem andern System wird dadurch genügt, daß man für u die halbe Summe, für v die halbe Differenz eines jeden Paares der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ setzt.

Wenn man daher aus dem System $P = 0$, $Q = 0$ diejenigen realen Werthe von u berechnet, zu welchen imaginäre Werthe von v gehören, so findet man alle complexen Wurzeln $u \pm v$ der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$.

11. Wenn bei steigendem realen x die Function $f(x)$ steigt oder fällt, so hat die Differenz $f(x + u) - f(x)$ mit der Differenz u dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen, und der Quotient der Differenzen ist positiv oder negativ, auch bei verschwindendem u. Wenn daher innerhalb gegebener Grenzen für x

$$\lim \frac{f(x + u) - f(x)}{u} = f'(x), \quad u = 0$$

positiv (negativ) ist, so ist die Function $f(x)$ im Steigen (Fallen) begriffen, während x innerhalb der gegebenen Grenzen steigt. Gesetzt, x durchläuft die realen Werthe a bis b, $f(x)$ bleibt dabei endlich und wechselt das Zeichen, während $f'(x)$ endliche Werthe von einerlei Zeichen hat, so schließt man, daß die Gleichung $f(x) = 0$ eine und nicht mehr als eine reale Wurzel zwischen den Grenzen a und b hat.

Die entscheidende Function $f'(x)$ heißt der Differentialquotient (nach Leibniz, Fluxion nach Newton, Derivation nach Lagrange) der gegebenen Function $f(x)$. Es sei z. B. $f(x) = ax^k$ und k eine ganze positive Zahl, so hat man (1)

$$f'(x) = \lim a \frac{(x+u)^k - x^k}{u} = akx^{k-1}, \quad u = 0.$$

Für $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + . . + a_1 x + a_0$ findet man ebenso

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + . . + 2a_2 x + a_1.$$

Der Differentialquotient von $f'(x)$ heißt der 2te Differentialquotient von $f(x)$ und wird durch $f''(x)$ bezeichnet, so daß

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + . . + 2a_2$$

durch 2 theilbar ist, u. s. w. Der $(n-1)$te Differentialquotient einer Function $n$ten Grades ist eine Function 1ten Grades.

Ein Werth von x, bei welchem die ganze Function $f(x)$ und alle ihre Differentialquotienten positiv ausfallen, ist eine obere Grenze für die realen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ (Newton Arithm. univ. p. 194 ed. Lugd.) Z. B.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 \\ f'(x) &= 5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 \\ \tfrac{1}{2}f''(x) &= 10x^3 - 12x^2 - 30x + 30 \\ \tfrac{1}{2\cdot 3}f^{(3)}(x) &= 10x^2 - 8x - 10 \\ \tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}f^{(4)}(x) &= 5x - 2 \end{aligned}$$

Bei $x = 1$ ist zwar $f^{(4)}$ positiv, aber nicht $f^{(3)}$. Bei $x = 2$ sind $f^{(4)}, f^{(3)}, f'', f', f$ positiv; also sind $f^{(3)}, f'', f', f$ im Steigen begriffen, während x von 2 an steigt; mithin hat die Gleichung $f(x) = 0$ über der Grenze 2 keine reale Wurzel. Eine untere Grenze für die realen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ist einer oberen Grenze für die realen Wurzeln der Gleichung $(-1)^5 f(-x) = 0$ entgegengesetzt gleich. Von den Functionen

$$\begin{aligned} &x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120 \\ &5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 60x + 63 \\ &10x^3 + 12x^2 - 30x - 30 \\ &10x^2 + 8x - 30 \\ &5x + 2 \end{aligned}$$

sind bei $x = 1$ die 2 letzten, bei $x = 2$ die 3 letzten, bei $x = 3$ alle positiv; also ist -3 eine untere Grenze für die realen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

12. Wenn die ganze Function $f(x)$ und ihr Differentialquotient $f'(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor ersten oder höhern Grades haben, so sind die Divisoren ersten Grades von $f(x)$ nicht alle von einander verschieden, es giebt einfache und mehrfache Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$*), und die Function $f(x)$ ist theilbar durch $y_1 y_2{}^2 y_3{}^3 \,..$, wobei $y_1, y_2, y_3, ..$ bestimmte ganze Functionen von x bedeuten, deren Coefficienten rational sind, und deren jede mit ihrem Differentialquotienten einen gemeinschaftlichen Divisor nicht hat.

Beweis. Aus dem Werth $f(x) = a_n(x - \alpha_1) \,..\, (x - \alpha_n)$ folgt

$$\frac{f(x+u)}{f(x)} = \frac{x+u-\alpha_1}{x-\alpha_1} \,..\, \frac{x+u-\alpha_n}{x-\alpha_n} = \left(1 + \frac{u}{x-\alpha_1}\right) .. \left(1 + \frac{u}{x-\alpha_n}\right)$$

und nachdem man auf beiden Seiten 1 subtrahirt und durch u dividirt hat,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lim \frac{f(x+u) - f(x)}{uf(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + .. + \frac{1}{x-\alpha_n}.$$

Wenn nun $g(x)$ der größte gemeinschaftliche Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$ ist, so erhält man durch Multiplication der gebrochenen Function mit dem Quotienten $f(x) : g(x)$ eine ganze Function, daher können die Nenner $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$, .. nicht alle von einander verschieden sein. Z. B. unter der Voraussetzung

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^\lambda (x - \alpha_2)^\mu (x - \alpha_3)^\nu \,..$$

haben λ Nenner den Werth $x - \alpha_1$, u. s. w. Also ist

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda}{x - \alpha_1} + \frac{\mu}{x - \alpha_2} + \frac{\nu}{x - \alpha_3} + \,..$$

$$g(x) = a_n(x - \alpha_1)^{\lambda-1} (x - \alpha_2)^{\mu-1} (x - \alpha_3)^{\nu-1} \,..$$

$$f(x) : g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \,...$$

Der Quotient $f(x) : g(x)$ ist die ganze Function mit rationalen Coefficienten, welche alle 1- und mehrfachen Divisoren ersten Grades von $f(x)$ einfach enthält. Ebenso bildet man aus $g(x)$, wenn $h(x)$ der größte gemeinschaftliche Divisor von $g(x)$ und $g'(x)$ ist, die ganze Function $g(x) : h(x)$, welche alle 2- und mehrfachen Divisoren ersten Grades von $f(x)$ einfach enthält; u. s. w. Durch Division findet man endlich die ganzen Functionen mit rationalen Coefficienten

*) Die Theorie der mehrfachen Wurzeln einer Gleichung ist vor der Erfindung der Differentialrechnung von Hudde 1657 begründet worden. Epist. I, reg. 10 in Schooten's Ausgabe von Descartes' Geometrie.

$$y_1 = \frac{f(x) : g(x)}{g(x) : h(x)}, \text{ u. s. w.}$$

13. Bei einer gegebenen Reihe von positiven und negativen Zahlen bestimme man die Zeichen der Quotienten jeder folgenden Zahl durch die zunächst vorhergehende. Wenn unter diesen Quotienten v negative sich befinden, so sagt man, die gegebene Reihe hat v Wechsel (variations). Der ganzen Function $f(x)$ schreibt man ebensoviel Wechsel zu, als die Reihe ihrer Coefficienten hat.

I. Wenn α eine positive Zahl ist, so hat die ganze Function $(x - \alpha)f(x)$ eine ungerade Anzahl mehr Wechsel als $f(x)$. Dagegen hat $(x + \alpha)f(x)$ ebensoviel oder eine gerade Anzahl weniger Wechsel als $f(x)$.

Beweis. In $f(x)$ trete der erste Wechsel bei dem Coefficienten a_p ein, der zweite bei a_q, der letzte bei a_t, wobei $p, q, \ldots$ eine fallende Reihe bilden. Dann haben in dem Product $(x - \alpha)f(x)$ die Coefficienten von x^{p+1}, x^{q+1}, x^{t+1} der Reihe nach einerlei Zeichen mit a_p, a_q, a_t. Also zeigen sich in $(x - \alpha)f(x)$ bis zu dem Coefficienten von x^{p+1} wenigstens 1 Wechsel, bis zu dem Coefficienten von x^{q+1} wenigstens 2, und bis zu dem Coefficienten von x^{t+1} wenigstens ebensoviel Wechsel als $f(x)$ hat. Nach der Voraussetzung ist a_0 mit a_t von einerlei Zeichen, folglich giebt es in $(x - \alpha)f(x)$ bis zu dem Schlußglied $-\alpha a_0$ wenigstens einen Wechsel mehr als deren $f(x)$ hat.

Ebenso erkennt man, daß in $(x + \alpha)f(x)$ bis zu dem Coefficienten von x^{p+1} höchstens 1 Wechsel, bis zu dem Coefficienten von x^{q+1} höchstens 2, und bis zu dem Coefficienten von x^{t+1} höchstens ebensoviel Wechsel stattfinden, als deren $f(x)$ hat. Und nur in dem Falle, daß bei dem Coefficienten von x^{t+1} ein Wechsel nicht stattgefunden hat, tritt bis zu dem Schlußglied noch ein Wechsel ein.

In $(x - \alpha)f(x)$, $f(x)$, $(x + \alpha)f(x)$ gebe es der Reihe nach u, v, w Wechsel. Wenn a_n und a_0 einerlei Zeichen haben, so sind v und w gerade, u ungerade; wenn a_n und a_0 verschiedene Zeichen haben, so sind v und w ungerade, u gerade. Daher ist immer $u - v$ ungerade, $v - w$ gerade.

II. Descartes' Regel*). Die Gleichung $f(x) = 0$ hat höch-

---

*) Diese Regel ist von Descartes (Géom. III) zuerst, jedoch nicht hinreichend genau aufgestellt worden. Sie heißt auch Harriot'sche Regel, obgleich sie in Harriot's Nachlaß vergeblich gesucht worden ist (Klügel math. W. I p. 50 ff. II p. 435). Die Berichtigung und den Beweis verdankt man Gauß (Crelle's J. 3 p. 1). Vergl. Choquet et Mayer Algèbre 392 ff.

stens ebensoviel positive Wurzeln, als es in $f(x)$ Wechsel giebt, und höchstens ebensoviel negative Wurzeln, als es in $f(-x)$ Wechsel giebt.

Z. B. $f(x) = x^3 + 3x - 5$ hat 1 Wechsel, $f(-x)$ hat keinen Wechsel, also kann die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens 1 positive und keine negative Wurzel haben.

Beweis. Die Gleichung $f(x) = 0$ habe die positiven Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, so daß $f(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_k)\varphi(x)$ ist und die Gleichung $\varphi(x) = 0$ keine positiven Wurzeln hat. Die Gleichung $(x - \alpha_1)\varphi(x) = 0$ hat 1 positive Wurzel, während es in $(x - \alpha_1)\varphi(x)$ wenigstens 1 Wechsel giebt; die Gleichung $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\varphi(x) = 0$ hat 2 positive Wurzeln, während es in $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\varphi(x)$ wenigstens 2 Wechsel giebt; u. s. w. Wenn nun k Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ positiv sind, so giebt es in $f(x)$ wenigstens k Wechsel, und umgekehrt.

III. Es gebe v Wechsel in $f(x)$, v' Wechsel in $f(-x)$, dann hat die Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$ höchstens $v + v'$ reale Wurzeln. Wenn unter den Coefficienten von $f(x)$ keiner 0 ist, so giebt es $n - v$ Nicht-Wechsel in $f(x)$, aus welchen die in $f(-x)$ vorhandenen Wechsel entspringen; daher ist $v + v' = n$.

Wenn $2k$ folgende Glieder in $f(x)$ fehlen, so enthält von den an der Lücke stehenden Gliedern das eine eine gerade Potenz von x, das andere eine ungerade Potenz, und es entspringt aus ihren Zeichen entweder in $f(x)$ oder in $f(-x)$ ein Wechsel. Anstatt dieses einen Wechsels erhält man in $f(x)$ und in $f(-x)$ zusammen $2k + 1$ neue Wechsel, wenn man die Lücke durch $2k$ Glieder mit willkürlichen Coefficienten ausfüllt. Demnach wird die Zahl $v + v'$ durch $2k$ zu n ergänzt, und man hat $v + v' = n - 2k$.

Wenn $2k + 1$ folgende Glieder in $f(x)$ fehlen, so enthalten die an der Lücke stehenden Glieder Potenzen von x, die beide gerade oder beide ungerade sind, und es entspringt aus ihren Zeichen entweder sowohl in $f(x)$ als auch in $f(-x)$, oder in keiner von beiden ein Wechsel. Dafür erhält man in $f(x)$ und in $f(-x)$ zusammen $2k + 2$ neue Wechsel, wenn man die Lücke durch $2k + 1$ Glieder mit willkürlichen Coefficienten ausfüllt. Also wird die Zahl $v + v'$ durch $2k$ oder durch $2k + 2$ zu n ergänzt, je nachdem die an der Lücke stehenden Glieder verschiedene oder gleiche Zeichen besitzen, und man hat $v + v' = n - 2k$ in dem ersten Falle, $v + v' = n - 2k - 2$ in dem andern Falle.

14. Aus der Function $V = f(x)$ und ihrem Differentialquotienten $V_1 = f'(x)$ kann man durch successive Divisionen die Kette von

Gleichungen bilden

$$V \;=\; V_1 Q_1 \;-\; V_2$$
$$V_1 \;=\; V_2 Q_2 \;-\; V_3$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$V_{r-2} = V_{r\text{-}1} Q_{r\text{-}1} \;-\; V_r$$

Um ganze Coefficienten zu erreichen, versieht man die Dividenden mit hinreichenden positiven Multiplicatoren. Die Größen V_2, V_3, .. sind den einzelnen Divisionsresten entgegengesetzt gleich, und die letzte V_r ist entweder ein Divisor von $V_{r\text{-}1}$ oder von x unabhängig. Wenn die Function V_r in $V_{r\text{-}1}$ aufgeht, so ist sie der größte gemeinschaftliche Divisor von V und V_1; wenn V_r von x unabhängig ist, so giebt es keine Function von x, die in V und V_1 zugleich aufgeht. Die Reihe V, V_1, . . ., V_r wird eine Sturm'sche Reihe genannt.

Sturm'scher Satz*). Wenn die Sturm'sche Reihe dadurch k Wechsel verliert, daß x von a bis b steigt, so liegen k von einander verschiedene einfache oder vielfache reale Wurzeln der Gleichung $V = 0$ zwischen den Grenzen a und b.

Beweis. Die Sturm'sche Reihe kann nur dadurch Wechsel gewinnen oder verlieren, daß bei verändertem x einzelne Glieder im Verschwinden das Zeichen wechseln. Wenn bei einem bestimmten Werth von x das Anfangsglied V nicht verschwindet und ein Mittelglied V_i verschwindet, so ist $V_{i\text{-}1} = - V_{i+1}$ und von 0 verschieden, weil sonst zufolge der obigen Kette alle Glieder verschwinden müßten, gegen die Voraussetzung. Die Functionen $V_{i\text{-}1}$ und V_{i+1} behalten entgegengesetzte Zeichen, während bei hinreichend kleinem u die Variable von $x - u$ bis $x + u$ steigt, denn bei hinreichend kleinem u hat jede Function $\varphi(x + u)$ mit $\varphi(x)$ einerlei Zeichen (8). Also bleibt die Anzahl der Wechsel in der Sturm'schen Reihe unverändert, während ein Mittelglied V_i das Zeichen wechselt.

Wenn dagegen bei $x = \alpha$ das Anfangsglied V verschwindet und V_1 nicht verschwindet, so ist zufolge der Gleichung (11)

$$\lim \frac{f(x + u) - f(x)}{u} = f'(x) \;, \quad u = 0$$

$f(\alpha + u)$ bei hinreichend kleinem u von einerlei Zeichen mit $uf'(\alpha)$; also hat man, während x von $\alpha - u$ bis $\alpha + u$ steigt,

entweder

x	V_1	V
$\alpha - u$	$+$	$-$
$\alpha + u$	$+$	$+$

oder

x	V_1	V
$\alpha - u$	$-$	$+$
$\alpha + u$	$-$	$-$

und die Sturm'sche Reihe verliert in beiden Fällen einen Wechsel.

*) Von Sturm 1829 der Pariser Academie mitgetheilt. Férussac Bulletin XI p. 419. Choquet et Mayer Algèbre 427 ff.

Wenn endlich bei $x = \alpha$ mit dem Anfangsglied V zugleich V_1 verschwindet, so ist α eine λfache Wurzel der Gleichung $V = 0$ und alle Glieder der Sturm'schen Reihe sind durch $(x - \alpha)^{\lambda-1}$ theilbar (12). Es sei z. B. $f(x) = (x - \alpha)^\lambda g(x)$, so hat man

$$\frac{f(x+u)-f(x)}{u} = \frac{(x+u-\alpha)^\lambda - (x-\alpha)^\lambda}{u} g(x+u) + (x-\alpha)^\lambda \frac{g(x+u)-g(x)}{u}$$

folglich bei verschwindendem u (11)

$$f'(x) = \lambda(x - \alpha)^{\lambda-1} g(x) + (x - \alpha)^\lambda g'(x),$$

$$V : (x-\alpha)^{\lambda-1} = (x-\alpha)g(x), \quad V_1 : (x-\alpha)^{\lambda-1} = \lambda g(x) + (x-\alpha)g'(x).$$

Diese beiden Glieder haben bei $x = \alpha + u$ und hinreichend kleinem u bezüglich mit $ug(\alpha)$ und mit $\lambda g(\alpha)$ einerlei Zeichen. Also verliert auch in diesem Falle, während x von $\alpha - u$ bis $\alpha + u$ steigt, die durch $(x - \alpha)^{\lambda-1}$ dividirte Sturm'sche Reihe sowie die ursprüngliche Sturm'sche Reihe einen Wechsel.

Wenn demnach k verschiedene reale Wurzeln der Gleichung $V=0$ zwischen den Grenzen a und b liegen, so verliert die Sturm'sche Reihe k Wechsel, während x von a bis b steigt, und umgekehrt.

15. Wenn $f(x)$ bei $x = \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \ldots$ verschwindet, so ist (2)

$$f(u + iv) = [u - \alpha_1 + i(v - \beta_1)][u - \alpha_2 + i(v - \beta_2)] \ldots$$

Durch die Transformationen (Allg. Arithm. §. 31, 9)

$$f(u + iv) = p + iq = re^{i\varphi}, \quad u - \alpha_1 + i(u - \beta_1) = c_1 e^{i\gamma_1}, \ldots$$

findet man

$$re^{i\varphi} = c_1 c_2 \ldots e^{i(\gamma_1+\gamma_2+\ldots)}, \quad re^{-i\varphi} = c_1 c_2 \ldots e^{-i(\gamma_1+\gamma_2+\ldots)}$$

$$r = c_1 c_2 \ldots, \quad \varphi = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots, \quad \operatorname{tang}\varphi = q : p.$$

Bezeichnet man auf einer Ebene den Nullpunct durch O, die Gerade, auf der die Puncte der realen Zahlen liegen, durch OO', die Puncte der Complexen $u + iv$, $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_2 + i\beta_2, \ldots$ durch $P, A_1, A_2, \ldots$, und zieht man $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ in der Richtung OO', so sind die Strecken $A_1P, A_2P, \ldots$ den Moduln $c_1, c_2, \ldots$ und die Winkel B_1A_1P, $B_2A_2P, \ldots$ den Amplituden $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ gleich.

Wenn bei stetig veränderten u, v der Punct P eine geschlossene Linie einmal durchläuft, die sich selbst nicht schneidet und den Punct A_1 einschließt, so dreht sich A_1P um 360^0 und γ_1 ändert sich um 2π. Die Gesammtänderung desselben Winkels würde 0 betragen, wenn der Punct A_1 außerhalb der geschlossenen Bahn läge. Wenn die geschlossene Linie, welche P einmal zurücklegt, μ Puncte des Systems $A_1, A_2, \ldots$ einschließt, aber durch keinen Punct desselben Systems hindurchgeht, so erhält die Summe $\varphi = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$ die Gesammtänderung $\mu \cdot 2\pi$.

Gesetzt nun, die Summe φ liegt Anfangs zwischen $k\pi$ und $(k+1)\pi$, wo k eine ganze Zahl bedeutet, so durchläuft φ jeden der Werthe $(k+1)\pi$, $(k+2)\pi$, .., $(k+2\mu)\pi$ einmal oder ungeradmal. Bei jedem dieser 2μ Werthe verschwindet $\tan \varphi$, und zwar steigend (aus dem Negativen ins Positive) oder fallend (aus dem Positiven ins Negative), je nachdem φ steigt oder fällt. Also verschwindet dabei $\tan \varphi$ überhaupt 2μmal öfter steigend als fallend. Umgekehrt schließt man:

Cauchy's Satz*). Wenn der Punct P der Complexen $x=u+iv$ bei stetig veränderten u, v eine geschlossene sich selbst nicht schneidende Linie einmal durchläuft, wenn dabei die ganze Function $f(u+iv)=p+iq$ nicht verschwindet, aber der Quotient $q:p$ mehrmal verschwindet, und zwar 2μmal öfter steigend als fallend: so enthält das von der geschlossenen Linie umfaßte Gebiet μ Puncte von Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, unter denen mehrere oder alle übereinstimmen können.

16. Wenn $f(x)$ eine ganze Function $m$ten Grades von x ist, y eine $n$te Wurzel von x und β eine eigentliche $n$te Wurzel von 1 (Allg. Arithm. §. 18, 9), wenn daher $y\beta$, $y\beta^2$, . . , $y\beta^n$ die Werthe der $n$ten Wurzel von x sind, so ist $f(y)$ eine $n$deutige irrationale Formel, und $f(y\beta)$, $f(y\beta^2)$, . . sind conjugirte Werthe derselben.

Das Product der n conjugirten Werthe $f(y\beta)\, f(y\beta^2) \,.\,.\, f(y\beta^n)$ ist eine ganze Function mnten Grades von y, die durch die Vertauschung von y mit $y\beta$ nicht geändert wird, und aus diesem Grunde nur solche Potenzen von y enthalten kann, deren Exponenten durch n theilbar sind. Also ist dasselbe Product eine ganze Function $m$ten Grades von y^n d. i. von x, und heißt die Norm der irrationalen Formel $f(y)$. Vergl. Allg. Arithm. §. 16, 7.

Wenn die Norm von $f(y)$ durch $\varphi(x)$ bezeichnet wird, so sind die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ die $n$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $f(y) = 0$. Denn $f(y)$ verschwindet bei m Werthen von y, und mit $f(y)$ verschwindet auch das Product $\varphi(x)$, während $x = y^n$ ist.

Am leichtesten findet man aus der Gleichung

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \,.\,.\, = 0$$

die Gleichung

$$f_1(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \,.\,.\, = 0,$$

deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln von $f(x)=0$ sind. Man bil-

*) Cauchy hat diesen Satz 1831 der Turiner Academie, 1837 in dem J. de l'Ecole polyt. Cah. 25 p. 176 mitgetheilt. Inzwischen hat Sturm 1836 denselben Satz einfach bewiesen Liouv. J. 1 p. 290. Vergl. die Beweise von Sturm und Liouville Liouv. J. 1 p. 278 und Moigno Liouv. J. 5 p. 75. Serret Algèbre supér. I p. 117.

det $f_1(x)$, indem man $f(x)$ mit $f(-x)$ oder mit $-f(-x)$ multiplicirt und x^2 durch x ersetzt, so daß $b_m = a_m^2$,

$$b_{m\cdot 1} = - a_{m\cdot 1}^2 + 2a_m a_{m\cdot 2}$$
$$b_{m\cdot 2} = + a_{m\cdot 2}^2 - 2a_{m\cdot 1}a_{m\cdot 3} + 2a_m a_{m\cdot 4}$$
$$b_{m\cdot 3} = - a_{m\cdot 3}^2 + 2a_{m\cdot 2}a_{m\cdot 4} - 2a_{m\cdot 1}a_{m\cdot 5} + 2a_m a_{m\cdot 6}$$

u. s. w. Aus $f_1(x)$ findet man durch dasselbe Verfahren $f_2(x)$, so daß die Wurzeln von $f_2(x) = 0$ die Quadrate der Wurzeln von $f_1(x) = 0$, mithin die Biquadrate der Wurzeln von $f(x) = 0$ gleich sind. U. s. w. Die abgeleiteten Gleichungen, deren Wurzeln hinreichend hohe Potenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung sind, dienen zur Bestimmung der Moduln (der absoluten Werthe) solcher Wurzeln, zuerst der größten, dann der nächstkleinern, u. s. w. nach einer vorzüglichen Methode, die von Gräffe (Auflösung der höhern numerischen Gleichungen, Zürich 1837) erfunden und von Encke (Astron. Jahrb. 1841 oder Crelle's J. 22 p. 193) weiter ausgeführt worden ist.

17. I. Eine ganze Function der $n$ten Wurzel von x hat n Glieder, welche die 0te, 1te, . . $(n-1)$te Potenz der Wurzel enthalten. Bezeichnet man eine eigentliche $n$te Wurzel von 1 durch β, und durch

$$f(\beta) = a_0 + a_1\beta + \cdot\cdot + a_{n-1}\beta^{n-1}$$

einen Werth der Function, so sind $f(\beta^2), \ldots, f(\beta^n)$ die übrigen Werthe derselben. Die conjugirten Werthe $f(\beta), \ldots, f(\beta^n)$ sind die Wurzeln einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, weil sie bei der Vertauschung von β mit $\beta^2, \ldots$ unverändert bleiben, mithin nur solche Potenzen der $n$ten Wurzel von x enthalten, deren Exponenten durch n theilbar sind. Man findet diese Gleichung für die Unbekannte u, indem man zu den Gleichungen $0 = f(\beta) - u$, $0 = \beta f(\beta) - \beta u$, . . d. i.

$$0 = a_0 - u + a_1\beta + a_2\beta^2 + \cdot\cdot + a_{n-1}\beta^{n-1}$$
$$0 = a_{n-1} + (a_0 - u)\beta + a_1\beta^2 + \cdot\cdot + a_{n-2}\beta^{n-1}$$
$$0 = a_{n-2} + a_{n-1}\beta + (a_0 - u)\beta^2 + \cdot\cdot + a_{n-3}\beta^{n-1}$$

u. s. w. die Determinante $n$ten Grades bildet (Allg. Arithm. §. 26)

$$\chi(u) = \begin{vmatrix} a_0 - u & a_1 & a_2 & . \\ a_{n-1} & a_0 - u & a_1 & . \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 - u & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

Wenn man zu den Elementen der ersten Colonne die mit $\beta, \beta^2, \ldots$ multiplicirten Elemente der 2ten, 3ten, . . Colonne addirt, so bleibt die Determinante unverändert. Alle Elemente der transformirten ersten

lonne verschwinden, wenn u einen der conjugirten Werthe $f(\beta), f(\beta^2), ..$ erhält. Also hat die Gleichung $\chi(u) = 0$ die Wurzeln $f(\beta), f(\beta^2), .., f(\beta^n)$. In der That enthält die Determinante $\chi(u)$ nur solche Glieder, bei denen die Summe der Indices durch n theilbar ist.

In $\chi(u)$ hat u^n den Coefficienten $(-1)^n$, und wenn man $\chi(0)$ durch diesen Coefficienten dividirt, so erhält man das mit $(-1)^n$ multiplicirte Product der Wurzeln von $\chi(u) = 0 (4)$. Also ist $\chi(u)$ die Norm der irrationalen Formel u.

Beispiele. Wenn $\beta^3 = 1$, so hat $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2$ die Norm

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0{}^3 - 3a_0a_1a_2 + a_2{}^3 + a_1{}^3$$

Wenn $\beta^4 = 1$, so hat $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3$ die Norm

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_0{}^4 - 4a_0{}^2a_1a_3 + 4a_0a_2a_3{}^2 - a_3{}^4 \\ \quad - 2a_0{}^2a_2{}^2 + 2a_1{}^2a_3{}^2 \\ \quad + 4a_0a_1{}^2a_2 - 4a_1a_2{}^2a_3 \\ \quad - a_1{}^4 \quad + a_2{}^4 \end{array}$$

Die Norm von $a + b\sqrt[12]{x} + c\sqrt[9]{x} + d\sqrt[8]{x}$ ist durch die Norm von $a + b\sqrt[72]{x^6} + c\sqrt[72]{x^8} + d\sqrt[72]{x^9}$ theilbar. Vergl. Meier Hirsch Aufg. aus der Theorie der algebraischen Gleichungen 1809 §. 96 ff.

II. Wenn u eine Function mehrerer Wurzeln ist, so bilde man zuerst die partiale Norm derselben in Bezug auf eine der Wurzeln, welche eine Function der übrigen Wurzeln ist, u. s. w. Die Norm von u ist das Product aller conjugirten Werthe von u.

Die Formel $\sqrt[\lambda]{p} + \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r}$ hat $\lambda\mu\nu$ conjugirte Werthe, deren Product eine ganze Function von p, q, r ist.

Die Formel $\sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + ..$ hat $nnn..$ conjugirte Werthe, deren Product die $n$te Potenz einer ganzen Function von $p, q, r, ..,$ der Norm der gegebenen Formel ist. Wenn man einen beliebigen Werth von $\sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + ..$ durch y_1 und eine eigentliche $n$te Wurzel von 1 durch β bezeichnet, so sind $y_1\beta, y_1\beta^2, .., y_1\beta^{n-1}$ andre Werthe derselben Formel. Ferner findet man aus einem der übrigen Werthe derselben Formel y_2 andre Werthe $y_2\beta, y_2\beta^2, .., y_2\beta^{n-1}$ derselben Formel, u. s. w. Bezeichnet man einen beliebigen Werth der $n$ten Wurzel von p durch x, so ist die Norm von $x + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + ..$ das Product

$$(x + y_1\beta)\,(x + y_1\beta^2)\,(x + y_1\beta^3)\,\ldots$$
$$(x + y_2\beta)\,(x + y_2\beta^2)\,(x + y_2\beta^3)\,\ldots$$
$$(x + y_3\beta)\,(x + y_3\beta^2)\,(x + y_3\beta^3)\,\ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

eine ganze Function nicht nur von q, r, . . , sondern auch von x^n d. i. von p, weil nach (4)

$$(x + y_k\beta)(x + y_k\beta^2) \,.\,.\, (x + y_k\beta^n) = x^n - (-y_k)^n.$$

Diese Normen sind von Möbius Crelle's J. 3 p. 17 und Förstemann Crelle's J. 14 p. 236 näher betrachtet worden.

Die Aufgabe, aus einer Gleichung, in der irrationale Functionen der Unbekannten vorkommen, eine Gleichung von demselben Umfang mit rationalen Gliedern abzuleiten, ist von Fermat den Mathematikern seiner Zeit vorgelegt worden (Cartesii epist. Tom. 3 p. 304). Descartes hat a. a. O. eine Auflösungsmethode von zweifelhaftem Erfolg angedeutet. Durch Reduction des Problems auf die Auflösung eines Systems von nicht linearen Gleichungen hat Fermat (Opp. p. 60) die Lösbarkeit der Aufgabe angezeigt, ebenso Newton (Arithm. univ. p. 64 ed. Lugd.). Daß alle conjugirten Werthe einer irrationalen Formel ein rationales Product geben, ist von Euler (Mém. de Berl. 1748 p. 234, sowie in einer spätern Abhandlung 1764 (Nov. Comm. Petrop. 9 p. 70) bewiesen worden. Ingleichen hat Lambert 1770 (Beiträge II[a] p. 202) durch die von Euler angewandten Mittel die Aufgabe gelöst: aus einer gegebenen Gleichung diejenige Gleichung abzuleiten, deren Wurzeln die $n$ten Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Vergl. Meier Hirsch a. a. O. Schönemann Crelle's J. 19 p. 234.

18. I. Wenn $g(x) = b_0 + b_1 x + \,.\,.\, + b_n x^n$ ist und die Gleichung $g(x) = 0$ die Wurzeln β_1, β_2, . . , β_n hat, deren eine durch β bezeichnet wird, so ist die $n$deutige algebraische Function

$$f(\beta) = a_0 + a_1\beta + \,.\,.\, + a_m\beta^m$$

eine Wurzel einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten ganze Functionen der Coefficienten a und b sind*). Um diese Gleichung für die Unbekannte u aufzustellen, bilde man die n Gleichungen

$$0 = f(\beta) - u,\ 0 = \beta f(\beta) - \beta u, \,.\,.\,,\ 0 = \beta^{n-1}f(\beta) - \beta^{n-1}u, \text{ d. i.}$$

$$\begin{array}{llllll} 0 = a_0 - u + a_1\beta & + \,.\,. & & & & \\ 0 = \quad * & (a_0 - u)\beta + a_1\beta^2 & + \,.\,. & & & \\ 0 = \quad * & * & (a_0 - u)\beta^2 + a_1\beta^3 + \,.\,. & & & \end{array}$$

u. s. w., ferner die m Identitäten

$$0 = g(\beta),\ 0 = \beta g(\beta)\,,\,.\,.\,,\ 0 = \beta^{m-1}g(\beta), \text{ d. i.}$$

$$\begin{array}{llll} 0 = b_0 + b_1\beta + \,.\,. & & & \\ 0 = * & b_0\beta + b_1\beta^2 + \,.\,. & & \\ 0 = * & * & b_0\beta^2 + b_1\beta^3 + \,.\,. & \end{array}$$

u. s. w., und endlich zu diesen $n + m$ Zeilen die Determinante $(n + m)$ten Grades (Allg. Arithm. §. 26)

---

*) Vergl. des Verf. Determinanten §. 11.

$$\varphi(u) = \begin{vmatrix} a_0 - u & a_1 & a_2 & . & . & & \\ * & a_0 - u & a_1 & a_2 & . & . & \\ * & * & a_0 - u & a_1 & a_2 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . & . \\ * & b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Wenn man zu den Elementen der ersten Colonne die mit β, β^2, .. multiplicirten Elemente der 2ten, 3ten, .. Colonne addirt, so bleibt die Determinante unverändert. Alle Elemente der transformirten ersten Colonne verschwinden, wenn u einen der conjugirten Werthe $f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_n)$ erhält. Demnach sind $f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)$ die Wurzeln der Gleichung $\varphi(u) = 0$.

II. In $\varphi(u)$ hat u^n den Coefficienten $(-1)^n b_n^m$, und wenn man $\varphi(0)$ durch diesen Coefficienten dividirt, so findet man das mit $(-1)^n$ multiplicirte Product der Wurzeln von $\varphi(u) = 0$ (4). Also ist

$$b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = \varphi(0).$$

Setzt man $f(x) = a_m(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_m)$, so findet man

$$f(\beta_1) = a_m(\beta_1 - \alpha_1) \ldots (\beta_1 - \alpha_m)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(\beta_n) = a_m(\beta_n - \alpha_1) \ldots (\beta_n - \alpha_m).$$

Nun ist $b_n(\beta_1 - x) \ldots (\beta_n - x) = (-1)^n g(x)$, folglich

$$\varphi(0) = b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = (-1)^{mn} a_m^n \, g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m)$$
$$= a_m^n \, b_n^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

wenn man durch $D(\ldots)$ das Product der mn Differenzen bezeichnet, welche durch Subtraction aller α von allen β entstehn.

III. Das Product der conjugirten Werthe $f(\beta_1) \ldots f(\beta_n)$ mit b_n^m, oder der conjugirten Werthe $g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m)$ mit $(-1)^{mn} a_m^n$, oder aller Differenzen $\beta - \alpha$ mit $a_m^n \, b_n^m$ ist $\varphi(0)$, eine homogene ganze Function der Coefficienten a von n Dimensionen und der Coefficienten b von m Dimensionen, und heißt die Resultante der Functionen $f(x)$ und $g(x)$ in Bezug auf die Variable x*).

Wenn z. B. die Coefficienten a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, .. und b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, .. homogene ganze Functionen der Variablen y, z von 0, 1, 2, .. Dimensionen sind, wenn demnach $f(x)$ und $g(x)$ homogene ganze Functionen der Variablen x, y, z sind, jene von m Dimensionen, diese von n Dimensionen, so ist ihre Resultante $\varphi(0)$ eine homogene ganze Func=

---

*) Euler Mém. de Berlin 1748 p. 234.

tion der Variablen y, z von mn Dimensionen*). Denn bei der Vertauschung von y und z mit yt und zt gehen a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, . . , b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, . . der Reihe nach über in a_m, $a_{m-1}t$, $a_{m-2}t^2$, . . , b_n, $b_{n-1}t$, $b_{n-2}t^2$, . . (§. 2, 10). Dabei gehen α_1, α_2, . . , β_1, β_2, . . der Reihe nach über in $\alpha_1 t$, $\alpha_2 t$, . . , $\beta_1 t$, $\beta_2 t$, . . (4, vergl. §. 7, 1); folglich erhält das Product aller mn Differenzen $\beta - \alpha$ den Multiplicator t^{mn}, d. h. $\varphi(0)$ geht in $t^{mn}\varphi(0)$ über, die Gleichung $\varphi(0) = 0$ ist für die Unbekannte $y : z$ vom mnten Grade.

Wenn die Resultante $\varphi(0)$ verschwindet, so verschwindet wenigstens eine unter den Differenzen $\beta - \alpha$, und die bei demselben Werth von x verschwindenden Functionen $f(x)$ und $g(x)$ haben einen gemeinschaftlichen Divisor $h(x)$, dessen Coefficienten zufolge des Systems $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, . . , $g(x) = 0$, $xg(x) = 0$, . . ganze Functionen der Coefficienten a und b sind. Nachdem man alle Werthe von y berechnet hat, bei welchen $\varphi(0)$ verschwindet, findet man aus der Gleichung $h(x) = 0$ die zugehörigen Werthe von x, welche zusammen dem System $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ genügen. Vergl. §. 6, 9.

---

*) Salmon higher plane curves p. 295.

Leipzig
Druck von C. P. Melzer.